Über die den Enneperschen Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes entsprechenden Voßschen Flächen.

Inaugural-Dissertation

verfaßt und der

Hohen Philosophischen Fakultät

der

Kgl. Bayer. Julius-Maximilians-Universität Würzburg

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt

am 24. November 1911

von

Johann Baptist Diller

aus Waischenfeld.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Würzburg.

Druck der Königl. Universitätsdruckerei H. Stürtz A. G.

1913.

Referent: Professor Dr. **Georg Rost.**

Literatur.

A. Enneper, Analytisch-geometrische Untersuchungen (Göttingische Nachrichten 1867 u. 1868).

E. Lenz, Über die Enneperschen Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes mit einem System ebener Krümmungslinien (Dissertation, Göttingen 1879).

L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, übersetzt von Lukat, 2. Auflage (Leipzig, Teubner 1910)

A. Voß, Über diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodaetischer Linien ein konjugiertes System bilden (Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München 1888, 18. Band, pag. 96).

A. Tachauer, Über diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodaetischer Linien ein konjugiertes System bilden (Dissertation, Würzburg 1903).

M. Schilling, Mathematische Modelle (Halle a. S. 1904, 1. Folge).

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549801_0087

Einleitung.

Als Voßsche Flächen (V-Flächen) bezeichnet man diejenigen Flächen, auf welchen es ein von geodätischen Linien gebildetes konjugiertes System gibt. Die durch Parallelismus der Flächennormalen Assoziierten einer pseudosphärischen Fläche (S-Fläche) sind V-Flächen. Das konjugierte System geodätischer Linien auf den letzteren entspricht dem System der Haupttangentenkurven auf der ersteren. Zu einer vorgegebenen S-Fläche gibt es eine ganze Klasse von V-Flächen, welche durch Integration der Laplaceschen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial U \partial V} \sin\omega + \frac{\partial M}{\partial U}\frac{\partial \omega}{\partial V} + \frac{\partial M}{\partial V}\frac{\partial \omega}{\partial U} = 0$$

ermittelt werden kann. Der Winkel ω, welcher einerseits von den Haupttangentenkurven $U = \text{const.}$, $V = \text{const.}$ einer S-Fläche, andererseits von den geodätischen Linien $U = \text{const.}$, $V = \text{const.}$ der zugehörigen V-Fläche eingeschlossen wird, genügt der partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung: $\frac{\partial^2 \omega}{\partial U \partial V} = \sin\omega$.

Voßsche Flächen, nämlich Rotationsflächen und im Zusammenhang damit Schraubenflächen als Biegungen von speziellen Voßschen Rotationsflächen, wurden von A. Tachauer (Diss., Würzburg 1903) aufgestellt[1]), jedoch unabhängig von der oben notierten Laplaceschen Gleichung. Dieselbe wurde dabei gar nicht benützt. Allgemein läßt sich ja auch eine Integration derselben nicht ermöglichen. Will man überhaupt mit Hilfe dieser Differentialgleichung zu V-Flächen gelangen, so muß man von bestimmten Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes (S-Flächen) ausgehen, um für $\frac{\partial \omega}{\partial U}$ und $\frac{\partial \omega}{\partial V}$ bestimmte Funktionen der Parameter U und V zu erhalten.

[1]) Schon 1897 hat P. Stäckel (cf. Math. Ann. 49, S. 255) eine spezielle Gruppe Voßscher Schraubenflächen aufgestellt.

In der folgenden Arbeit wurden als S-Flächen die von Enneper behandelten pseudophärischen Flächen mit einem System ebener Krümmungslinien zugrunde gelegt. Die Entwickelung derselben wird im § 1 gebracht und zwar im Anschluß an die Enneper sche Arbeit: „Analytisch-geometrische Untersuchungen“ (Göttingische Nachrichten, 1867 und 1868). Im § 2 wird unter Benützung der einschlägigen Ausführungen von A. Voß sowie der oben erwähnten Dissertation von A. Tachauer das Problem der V-Flächen behandelt und dabei die Laplacesche Differentialgleichung abgeleitet. Der § 3 bringt die Darstellung der Enneperschen Flächen bezogen auf die Haupttangentenkurven als Parameterkurven. Der § 4 enthält das zum Übergang von einer S-Fläche zu den entsprechenden V-Flächen notwendige Material. Da es nicht möglich ist, die Fundamentalgrößen 1. Ordnung E und G der V-Flächen durch Integration der Laplaceschen Differentialgleichung für den allgemeinen Fall anzugeben, so werden im § 5 spezielle Fälle eingehend behandelt und zwar an erster Stelle jener Fall, in welchem der Winkel, unter dem die Ebene einer ebenen Krümmungslinie einer Enneperschen S-Fläche diese Fläche schneidet, für alle Krümmungslinien derselbe ist, sowie an zweiter Stelle der Fall der pseudosphärischen Rotationsflächen. Beide Male ist die Integration der Laplaceschen Differentialgleichung möglich. Es ergeben sich neue Voßsche Flächen, nämlich allgemeine Schraubenflächen und Rotationsflächen; dabei treten auch gemeine Schraubenflächen (sog. Wendelflächen) auf. Im § 6 wird noch ein spezieller Fall von S-Flächen, welcher von Kuen und L. Bianchi behandelt wurde, zur Auffindung von V-Flächen zu verwenden versucht.

Die Anregung zur Behandlung des in Rede stehenden Problems erhielt ich durch Herrn Professor Dr. G. Rost, der mich auf die von A. Tachauer über V-Flächen verfaßte Dissertation hingewiesen hat.

§ 1.

Die Enneperschen Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes mit einem System ebener Krümmungslinien [1]).

Sind r' und r'' die beiden Hauptkrümmungsradien und ist R eine reelle Konstante, dann gilt für eine Fläche von konstantem negativem Krümmungsmaß:

$$r' r'' = -R^2. \tag{1}$$

Eine derartige Fläche wird auch als pseudosphärische Fläche und R als ihr Radius bezeichnet; $\frac{1}{R^2}$ ist ihr Krümmungsmaß.

Statt Gleichung (1) können auch die beiden folgenden:

$$\frac{1}{r'} = -\frac{1}{R}\frac{1-t}{1+t}; \quad \frac{1}{r''} = +\frac{1}{R}\frac{1+t}{1-t} \tag{2}$$

eingeführt werden, wo t eine noch zu bestimmende Funktion von den Parametern u' und v' der Krümmungslinien einer pseudosphärischen Fläche ist. Sind aber $u' = \text{const.}$ und $v' = \text{const.}$ die Krümmungslinien, dann gelten folgende Relationen [2]):

$$\frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right) = \frac{1}{r''}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v'}, \quad \frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right) = \frac{1}{r'}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u'}. \tag{3}$$

Hieraus ergeben sich unter Benützung der Gleichungen (2) die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v'} &= \left(\frac{1}{1+t} - \frac{t}{1+t^2}\right)\frac{\partial t}{\partial v'} \\ \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u'} &= -\left(\frac{1}{1-t} + \frac{t}{1+t^2}\right)\frac{\partial t}{\partial u'} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

---

[1]) Göttingische Nachrichten, Jahrgang 1868 und 1867. Vergl. auch E. Lenz, Diss. Göttingen, 1879.

[2]) Bianchi, pag. 93 und 101, Differentialgeometrie, übersetzt von Lukat (Teubner 1910, 2. Aufl.).

oder durch Integration:

$$\sqrt{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} F'_{(u')}, \quad \sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1-t}{\sqrt{1+t^2}} G'_{(v')}, \tag{5}$$

wo $F'_{(u')} = \frac{dF_{(u')}}{du'}$ nur von u' und $G'_{(v')} = \frac{dG_{(v')}}{dv'}$ nur von v' abhängt.

Da man $F_{(u')} = u'$ und $G_{(v')} = v'$ setzen darf, so erhält man:

$$\sqrt{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1-t}{\sqrt{1+t^2}}. \tag{5*}$$

Beachtet man aber die Notwendigkeit der Gleichung[1]):

$$\frac{DD''}{\sqrt{EG}} + \frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u'}\right) + \frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v'}\right) = 0$$

oder wegen (3)

$$\frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{r'}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{r''}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)\right) + \frac{\sqrt{EG}}{r'r''} = 0,$$

so bekommt man zur Bestimmung von t die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \operatorname{arc\,tg}\, t}{\partial v'^2} - \frac{\partial^2 \operatorname{arc\,tg}\, t}{\partial u'^2} = \frac{1}{2R^2} \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{6}$$

Die allgemeine Integration dieser Gleichung, welche mittels der Substitutionen $\operatorname{arc\,tg}\, t = z$ und $v = v' + u'$, $u = v' - u'$ auf die Form

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{8R^2} \cos(2z)$$

gebracht werden kann, ist unmöglich. Enneper behandelt dann den speziellen Fall, bei welchem das System der Krümmungslinien $u' = \text{const.}$, für welche also v' allein variiert, eben ist. In diesem Falle muß aber die Beziehung:

$$\frac{r'r''}{\sqrt{EG}} \frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right) = -\operatorname{ctg}\sigma \tag{7}$$

bestehen, wo der Winkel σ, unter welchem die Ebene einer ebenen Krümmungslinie die Fläche schneidet, nur von u' abhängt. Den Beweis für diese Behauptung führt Enneper auf folgende Weise.

Sind die Richtungscosinus der Tangenten an die Krümmungslinien v' und u' bzw. cos a', cos b', cos c' und cos a'', cos b'', cos c'', die Richtungscosinus der Flächennormale cos a, cos b, cos c und ist die Ebene einer ebenen Krümmungslinie $u' = \text{const.}$ durch die Winkel α, β, γ bestimmt, so gilt[2]):

$$\cos a' \cos\sigma' - \cos a \sin\sigma' = \cos\alpha$$

---

[1]) Bianchi, pag. 93.

[2]) Bianchi, pag. 166.

oder, wenn man mit Enneper den Winkel zwischen der Hauptnormale der u'-Kurve und der Tangente an die v'-Kurve mit σ bezeichnet,

$$\cos a' \sin\sigma - \cos a \cos\sigma = \cos\alpha.$$

Durch Differentiation nach v' ergibt sich, weil $\sigma = f(u')$,

$$\frac{\partial \cos a'}{\partial v'} \sin\sigma - \frac{\partial \cos a}{\partial v'} \cos\sigma = \frac{\partial \cos\alpha}{\partial v'}.$$

Da aber auch die Gleichung gilt[1]):

$$\cos a'' \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u'} \sin\sigma + \frac{D''}{\sqrt{G}} \cos a'' \cos\sigma = \frac{\partial \cos\alpha}{\partial v'},$$

so erhält man durch Einführung der Krümmungsradien r' und r'':

$$\cos a'' \left[\frac{r'}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right) \sin\sigma + \frac{\sqrt{G}}{r''} \cos\sigma\right] = \frac{\partial \cos\alpha}{\partial v'}.$$

Nun ist zu beachten, daß $\cos\alpha$ eine Funktion nur von u' ist. Es sind nämlich $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Richtungscosinus der zur Kurve u' = const. gehörigen Binormale und im allgemeinen Funktionen von u' und v'. Da die Kurve u' = const. aber eben ist, hat die Binormale, welche senkrecht zur Schmiegungsebene der u'-Kurve ist, immer dieselbe Richtung, weshalb $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nur Funktionen von u' allein sein können. Dieser Beweis läßt sich auch mit Hilfe der Frenetschen Formeln[2]) führen, insoferne als man zeigen kann, daß $\frac{\partial \cos\alpha}{\partial v'} = 0$ sein muß.

Aus der Gleichung:

$$\cos a''\left[\frac{r'}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{\sqrt{G}}{r''}\right) \sin\sigma + \frac{\sqrt{G}}{r''} \cos\sigma\right] = 0$$

resultiert aber dann, da $\cos a'' \neq 0$, sofort die Gleichung (7).

Aus der eben genannten Beziehung[3]) erhält man wegen der Gleichungen (2) und (5), wenn man

$$u_1 = \int \frac{1}{R} \operatorname{ctg}\sigma \, du' \tag{8}$$

setzt, zur Bestimmung von t die folgende Gleichung:

$$\frac{1}{1+t} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \frac{\partial t}{\partial u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{9}$$

[1]) Bianchi, pag. 93 und 94.
[2]) Bianchi, pag. 10.
[3]) Vergl. auch Göttingische Nachrichten 1867, pag. 260.

oder, wenn man integriert:

$$\arcsin\left(\frac{i(t-1)}{t+1}\right) = i u_1 + i v_1, \qquad (9^*)$$

wo v_1 (Integrationskonstante) eine noch näher zu bestimmende Funktion von v' ist. Schließlich ergibt sich:

$$t = \frac{1 - i \sin(i(u_1 + v_1))}{1 + i \sin(i(u_1 + v_1))}. \qquad (10)$$

Da t der Gleichung (6) genügen muß, erhält man aus der letzteren die Relation:

$$\cos(i(u_1 + v_1))\left[\frac{d^2 v_1}{dv'^2} - \frac{1}{2R^2}\frac{d\left(\frac{1}{\sin^2\sigma}\right)}{du_1}\right] = i \sin(i(u_1 + v_1))\left[\frac{1}{R^2 \sin^2\sigma} - \left(\frac{dv_1}{dv'}\right)^2\right]. \qquad (11)$$

Differenziert man jetzt diese Gleichung zweimal nach u_1, so erscheint für σ die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{du_1}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{\sin^2\sigma}\right)}{du_1^2} - \frac{4}{\sin^2\sigma}\right] = 0. \qquad (12)$$

Durch Integration erhält man die Beziehung:

$$\frac{1}{\sin^2\sigma} = A\cos(2iu_1) - B\,i\sin(2iu_1) + C, \qquad (12^*)$$

wo A, B und C willkürliche Konstante sind.

Enneper setzt nun für die folgende Entwickelung $B = 0$ [1]), wodurch die Gleichung (12*) die Form:

$$\frac{1}{\sin^2\sigma} = C + A\cos(2iu_1) \qquad (13)$$

annimmt. Setzt man jetzt den Wert von $\sin^2\sigma$ in Gleichung (11) ein, so ergibt sich:

$$\cos(iu_1)\left[\cos(iv_1)\frac{d^2 v_1}{dv'^2} - \frac{i}{R^2}\sin(iv_1)\left(A + C - R^2\left(\frac{dv_1}{dv'}\right)^2\right)\right]$$
$$- \sin(iu_1)\left[\sin(iv_1)\frac{d^2 v_1}{dv'^2} - \frac{i}{R^2}\cos(iv_1)\left(A - C + R^2\left(\frac{dv_1}{dv'}\right)^2\right)\right] = 0.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn

$$\cos(iv_1)\frac{d^2 v_1}{dv'^2} = \frac{i}{R^2}\sin(iv_1)\left(A + C - R^2\left(\frac{dv_1}{dv'}\right)^2\right) \text{ sowie}$$

[1]) Vergl. § 6.

$$\sin(i v_1)\frac{d^2 v_1}{dv'^2} = \frac{i}{R^2}\cos(i v_1)\left(A - C + R^2\left(\frac{dv_1}{dv'}\right)^2\right)$$

ist. Hieraus erhält man schließlich folgende Beziehungen:

$$\left(R\frac{dv_1}{dv'}\right)^2 = C - A\cos(2 i v_1) \tag{14}$$

$$\frac{d^2 v_1}{dv'^2} = i\frac{A}{R^2}\sin(2 i v_1) \tag{15}$$

$$\frac{d\sigma}{du'} = i\frac{A}{R}\sin(2 i u_1)\sin^2\sigma. \tag{16}$$

Infolge der Gleichungen (5*), bzw. (2) ergibt sich jetzt:

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{E} = \frac{1}{\cos(i(u_1 + v_1))}, \quad \sqrt{G} = i\,\mathrm{tg}(i(u_1 + v_1)), \\ &\qquad\qquad \frac{\sqrt{E}}{r'} = -\frac{i}{R}\,\mathrm{tg}(i(u_1 + v_1)), \\ &\frac{\sqrt{G}}{r''} = \frac{1}{R}\,\frac{1}{\cos(i(u_1 + v_1))}, \quad \frac{r''}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right) = \frac{1}{\cos(i(u_1 + v_1))}\,\frac{dv_1}{dv'} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen findet man:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\sqrt{E}}{r'} + \frac{d\sigma}{du'}\right)^2 + \left(\frac{r''}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)\right)^2 \sin^2\sigma = \frac{C^2 - A^2}{R^2}\sin^4\sigma, \\ &\sin\sigma\,\frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{r''}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)\right) + \cos\sigma\,\frac{\sqrt{E}}{r'}\,\frac{r''}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{\sqrt{E}}{r'} + \frac{d\sigma}{du'}\right) - \left(\frac{r''}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)\right)^2 \sin\sigma\cos\sigma = 2\left(\frac{\sqrt{E}}{r'} + \frac{d\sigma}{du'}\right)\mathrm{ctg}\,\sigma\,\frac{d\sigma}{du'} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Wie früher mitgeteilt wurde, gelten folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} \cos a'\sin\sigma - \cos a\cos\sigma &= \cos\alpha \\ \cos b'\sin\sigma - \cos b\cos\sigma &= \cos\beta \\ \cos c'\sin\sigma - \cos c\cos\sigma &= \cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Differenziert man die erste der Gleichungen (19) nach u', so erhält man [1]):

$$\frac{d\cos\alpha}{du'} = -\frac{r''}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)\sin\sigma\,\cos a'' + (\cos a'\cos\sigma + \cos a\sin\sigma)\left(\frac{\sqrt{E}}{r'} + \frac{d\sigma}{du'}\right). \tag{20}$$

Differenziert man nun ein zweites Mal nach u' und benützt Gleichung (18,$_2$), so findet man:

---

[1]) Siehe Bianchi, pag. 93, 94 und 101.

$$\frac{d^2\cos\alpha}{du'^2}+\left(\frac{\sqrt{E}}{r'}+\frac{d\sigma}{du'}\right)^2\cos\alpha=-2\cos\sigma\cos a''\frac{d\sigma}{du'}\frac{r''}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)$$
$$-\cos a'\sin\sigma\left(\frac{r''}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)\right)^2$$
$$+(\cos a'\cos\sigma+\cos a\sin\sigma)\frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{\sqrt{E}}{r'}+\frac{d\sigma}{du'}\right). \quad (21)$$

Addiert man hierauf auf beiden Seiten der letzten Gleichung den Ausdruck

$$\sin^2\sigma\left(\frac{r''}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)\right)^2$$

und verwendet man die Gleichungen (18, 1 u. 3), (19, 1) sowie (20), so resultiert:

$$\frac{d^2\cos\alpha}{du'^2}+\frac{C^2-A^2}{R^2}\sin^4\sigma\cos\alpha-2\operatorname{ctg}\sigma\frac{d\sigma}{du'}\frac{d\cos\alpha}{du'}=0. \quad (22)$$

Aus dieser Gleichung und den dazu gehörenden zwei analogen Gleichungen folgt aber dann:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{d\cos\alpha}{du'} & \frac{d\cos\beta}{du'} & \frac{d\cos\gamma}{du'} \\ \frac{d^2\cos\alpha}{du'^2} & \frac{d^2\cos\beta}{du'^2} & \frac{d^2\cos\gamma}{du'^2} \end{vmatrix}=0 \quad (23)$$

d. h. $$\cos\alpha\cos\alpha_0+\cos\beta\cos\beta_0+\cos\gamma\cos\gamma_0=0, \quad (24)$$

wobei α_0, β_0, γ_0 Konstante sind.

Durch diese Gleichung ist dargetan, daß alle Ebenen der ebenen Krümmungslinien einer Geraden, welche durch die Winkel α_0, β_0, γ_0 festgelegt ist, parallel laufen. Wählt man diese Gerade parallel zur z-Achse des Koordinatensystems, dann ist $\cos\alpha_0=0$, $\cos\beta_0=0$ und $\cos\gamma_0=1$, so daß aus Gleichung (24) $\cos\gamma=0$ folgt.

Jetzt kann man setzen:

$$\cos\alpha=\sin\varphi, \quad \cos\beta=-\cos\varphi, \quad \cos\gamma=0. \quad (25)$$

Multipliziert man ferner die Gleichungen (19) der Reihe nach bzw. mit $\cos a'$, $\cos b'$, $\cos c'$, so erhält man:

$$\cos a'\cos\alpha+\cos b'\cos\beta+\cos c'\cos\gamma=\sin\sigma$$

sowie, weil nach (17) $\sqrt{E}=\frac{1}{\cos(i(u_1+v_1))}$ ist, die Beziehung:

$$\sqrt{E}\ \Sigma\cos a'\cos\alpha=\frac{\sin\sigma}{\cos(i(u_1+v_1))}$$

und schließlich wegen (25)

$$(\cos a' \sin \varphi - \cos b' \cos \varphi)\sqrt{E} = \frac{\sin \sigma}{\cos(i(u_1 + v_1))}. \tag{26}$$

In analoger Weise leitet man aus der Gleichung (20) und den zwei entsprechenden Gleichungen die folgende ab:

$$\Sigma \frac{d \cos \alpha}{du'} \cos a' = \cos \sigma \left(\frac{\sqrt{E}}{r'} + \frac{d\sigma}{du'} \right) \tag{27}$$

oder mit Benützung von (17) und (25):

$$(\cos a' \cos \varphi + \cos b' \sin \varphi) \frac{d\varphi}{du'} \sqrt{E}$$

$$= \frac{\cos \sigma}{\cos(i(u_1 + v_1))} \left[-\frac{i}{R} \operatorname{tg}(i(u_1 + v_1)) + i \frac{A}{R} \sin(2 i u_1) \sin^2 \sigma \right]. \tag{28}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (20) nebst den zugehörigen analogen Gleichungen sowie Gleichung (18, 1) und (25) gilt ferner:

$$\left(\frac{d\varphi}{du'} \right)^2 = \frac{C^2 - A^2}{R^2} \sin^4 \sigma. \tag{29}$$

Auch φ hängt ebenso wie σ, α, β und γ nur von u' ab.

Benützt man nun die Gleichung (17, 1 u. 3) und zeigt man durch Verwendung der Gleichungen (22), (25) und (29), daß

$$\frac{d\varphi}{du'} \frac{d}{du'} \left(\frac{\sin \sigma}{\frac{d\varphi}{du'}} \right) = -\cos \sigma \frac{d\sigma}{du'}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{d\varphi}{du'} \frac{\partial}{\partial u'} \left[\frac{1}{\cos(i(u_1 + v_1))} \frac{\sin \sigma}{\frac{d\varphi}{du'}} \right]$$

$$+ \frac{\cos \sigma}{\cos(i(u_1 + v_1))} \left[-\frac{i}{R} \operatorname{tg}(i(u_1 + v_1)) + \frac{d\sigma}{du'} \right] = 0. \tag{30}$$

Nach den Gleichungen (19) und (25) ist, wenn Φ eine Funktion von φ bedeutet, die Gleichung der Ebene einer (ebenen) Krümmungslinie u' = const., welche durch den Punkt (x, y, z) geht, gegeben durch:

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = \Phi. \tag{31}$$

Differenziert man diese Gleichung sukzessive nach u' und beachtet man dabei die Gleichungen (26), (28) und (30), so bekommt man:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Addiert man aber diese Gleichung zu (31), so ergibt sich zur Bestimmung von Φ die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \Phi = 0,$$

woraus folgt:

$$\Phi = x_0 \sin\varphi - y_0 \cos\varphi,$$

wo x_0, y_0 Integrationskonstante sind. Die Gleichung (31) wird aber dann zu der folgenden:

$$(x - x_0)\sin\varphi - (y - y_0)\cos\varphi = 0,$$

durch die ausgesagt wird, daß die Ebenen der (ebenen) Krümmungslinien $u' = \text{const.}$ durch eine feste Gerade laufen, welche im Punkte (x_0, y_0) auf der xy-Ebene senkrecht steht. Nimmt man dieselbe als z-Achse des Koordinatensystems, so hat man, weil (wegen $x_0 = 0$, $y_0 = 0$) $\Phi = 0$, zur Bestimmung der x- und y-Koordinate eines Punktes der Enneperschen Flächen, die hier in Frage kommen, die Gleichungen:

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0;\quad (x\cos\varphi + y\sin\varphi)\frac{d\varphi}{du'} = -\frac{\sin\sigma}{\cos(i(u_1 + v_1))}. \tag{32}$$

Die Gleichung (19, 3) gibt für $\cos\gamma = 0$

$$\cos c' = \operatorname{ctg}\sigma\cos c,$$

welche Beziehung sich auch folgendermaßen schreiben läßt:

$$\sqrt{G}\,\frac{\partial z}{\partial u'} = \operatorname{ctg}\sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u'}\frac{\partial y}{\partial v'} - \frac{\partial y}{\partial u'}\frac{\partial x}{\partial v'}\right).$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (32) und (17, 2) erhält man dann:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u'} &= -\operatorname{ctg}\sigma\,\frac{\sin^2\sigma}{\dfrac{d\varphi}{du'}}\,\frac{\dfrac{dv_1}{dv'}}{\cos^2(i(u_1 + v_1))} \\ \text{oder}\qquad \frac{\partial z}{\partial u_1} &= -R\,\frac{\sin^2\sigma}{\dfrac{d\varphi}{du'}}\,\frac{\dfrac{dv_1}{dv'}}{\cos^2(i(u_1 + v_1))}. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Verwendet man noch die Gleichung (29), so ergibt sich:

$$\frac{\partial z}{\partial u_1} = \mp\,\frac{iR^2}{\sqrt{C^2 - A^2}}\,\frac{dv_1}{dv'}\,\frac{\partial}{\partial u_1}\operatorname{tg}(i(u_1 + v_1)).$$

Durch Integration findet man:

$$z\sqrt{C^2 - A^2} = iR^2\operatorname{tg}(i(u_1 + v_1))\frac{dv_1}{dv'} + V', \tag{34}$$

wo V′ eine noch näher zu bestimmende Funktion von v′ allein ist. Ihr Wert soll im folgenden bestimmt werden. Differenziert man die Gleichung $\cos c' \sin\sigma - \cos c \cos\sigma = 0$ nach u′, wobei man die der Gleichung (20) analoge Gleichung für $\cos\gamma$ benützt, und beachtet man die Gleichungen (17), so kommt man auf die Beziehung:

$$\left(-\frac{i}{R}\operatorname{tg}(i(u_1+v_1)) + \frac{d\sigma}{du'}\right)\frac{\partial z}{\partial u'} = -i\sin\sigma\cos\sigma\,\frac{1}{\sin(i(u_1+v_1))\cos(i(u_1+v_1))}\,\frac{dv_1}{dv'}\,\frac{\partial z}{\partial v'}.$$

Setzt man die Werte für $\frac{\partial z}{\partial u'}$ und $\frac{\partial z}{\partial v'}$ hier ein, wie sie sich aus den Gleichungen (33) und (34) ergeben, so erhält man:

$$\frac{dV'}{dv'} = -i\operatorname{tg}(i(u_1+v_1))\left[R^2\frac{d^2v_1}{dv'^2} + \frac{R\frac{d\sigma}{du'}}{\sin^2\sigma}\right] + \frac{1}{\cos^2(i(u_1+v_1))}\left[-\frac{\sin^2(i(u_1+v_1))}{\sin^2\sigma} + \left(R\frac{dv_1}{dv'}\right)^2\right].$$

Mit Hilfe der aufgestellten Relationen (13), (14), (15) und (16) findet man die Gleichung:

$$\frac{dV'}{dv'} = -i\operatorname{tg}(i(u_1+v_1))\,[iA\sin(2iv_1) + iA\sin(2iu_1)] + \frac{1}{\cos^2(i(u_1+v_1))}\,[-\sin^2(i(u_1+v_1))\,(C + A\cos(2iu_1)) + C - A\cos(2iv_1)].$$

Gibt man dem Gliede $C - A\cos(2iv_1)$ in der zweiten eckigen Klammer den Faktor 1 und schreibt man dafür $\sin^2(i(u_1+v_1)) + \cos^2(i(u_1+v_1))$, so resultiert schließlich:

$$\frac{dV'}{dv'} = C - A\cos(2iv_1) \quad \text{oder} \quad V' = \int (C - A\cos(2iv_1))\,dv'.$$

Nach dem Vorhergehenden sind also die Enneperschen Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes mit einem System ebener Krümmungslinien — u′ = const. — durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi \\ z\,\frac{\sqrt{C^2-A^2}}{R} &= \int \sqrt{C - A\cos(2iv_1)}\,\overline{\sqrt{C - A\cos(2iv_1)}}\,dv_1 \\ &\quad + i\operatorname{tg}(i(u_1+v_1))\,\sqrt{C - A\cos(2iv_1)} \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

$$\varrho \frac{\sqrt{C^2 - A^2}}{R} = \frac{\sqrt{C + A\cos(2i u_1)}}{\cos(i(u_1 + v_1))} \tag{36}$$

$$\left(\frac{d\varphi}{du_1}\right)^2 = \frac{C^2 - A^2}{(C + A\cos(2i u_1))^2 (C + A\cos(2i u_1) - 1)}. \tag{37}$$

Die Ebenen der Krümmungslinien $u' = \text{const.}$ laufen durch eine Gerade, welche zur z-Achse des Koordinatensystems gewählt wurde.

Enneper hat seine Ausführungen über diese Flächen im großen und ganzen nur angedeutet und vielfach auf die analogen Berechnungen für die entsprechenden Flächen mit konstantem positivem Krümmungsmaß hingewiesen. Aus diesem Grunde hielt es der Verfasser für notwendig, seine Entwickelungen etwas ausführlicher zu gestalten[1]).

Für die in den Flächengleichungen (35) mit (37) auftretenden Konstanten A und C gilt die Bedingung:

$$C \geqq [A] + 1, \tag{38}$$

wo $[A]$ den absoluten Wert von A bedeutet. Die Konstante C sei immer positiv. Die Notwendigkeit dieser aufgestellten Bedingung ergibt sich aus der Gleichung

$$\left(R\frac{du_1}{du'}\right)^2 = C + A\cos(2i u_1) - 1, \tag{39}$$

aus welcher nämlich folgt:

$$u' = \frac{R}{\sqrt{C - A - 1}} \int \frac{du_1}{\sqrt{1 + \frac{2A}{C - A - 1}\cos^2(i u_1)}}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{C - A - 1}} \int \frac{du_1}{\sqrt{1 + \frac{2A}{C - A - 1}\cosh^2 u_1}}. \tag{40}$$

Für ein negatives A ist maßgebend das Produkt:

$$\sqrt{C + [A] - 1}\ \sqrt{1 - \frac{2[A]}{C + [A] - 1}\cosh^2 u_1}.$$

Von der Reellitätsbedingung (38) muß später Gebrauch gemacht werden.

---

[1]) Vergl. E. Lenz, Diss. Göttingen 1879.

§ 2.

Die Voßschen Flächen.

Es soll in diesem Paragraphen die Darstellung der Voßschen[1]) Flächen besprochen werden, d. h. derjenigen Flächen, welche ein konjugiertes System von geodätischen Linien besitzen.

Damit die Parameterlinien U = const. und V = const. einer Fläche ein konjugiertes System von geodätischen Linien bilden, ist notwendig und hinreichend, daß die Bedingungen[2]):

$$D' = 0, \quad \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0, \quad \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = 0 \tag{1}$$

erfüllt sind, wobei die beiden letzten Christoffelsche Symbole[3]) darstellen, die mit den übrigen hier einschlägigen näher angegeben werden mögen.

$$\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = \frac{G\frac{\partial E}{\partial U} + F\frac{\partial E}{\partial V} - 2F\frac{\partial F}{\partial U}}{2(EG - F^2)}, \qquad \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \frac{-F\frac{\partial E}{\partial U} + 2E\frac{\partial F}{\partial U} - E\frac{\partial E}{\partial V}}{2(EG - F^2)},$$

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \frac{G\frac{\partial E}{\partial V} - F\frac{\partial G}{\partial U}}{2(EG - F^2)}, \qquad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial U} - F\frac{\partial E}{\partial V}}{2(EG - F^2)},$$

$$\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = \frac{-F\frac{\partial G}{\partial V} + 2G\frac{\partial F}{\partial V} - G\frac{\partial G}{\partial U}}{2(EG - F^2)}, \qquad \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial V} + F\frac{\partial G}{\partial U} - 2F\frac{\partial F}{\partial V}}{2(EG - F^2)}.$$

Nun ist zu beachten, daß die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung einer Fläche den Gleichungen von Codazzi[4]):

$$\frac{\partial D}{\partial V} - \frac{\partial D'}{\partial U} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} D + \left(\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right) D' + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} D'' = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial D''}{\partial U} - \frac{\partial D'}{\partial V} + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} D + \left(\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right) D' - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} D'' = 0 \tag{3}$$

sowie der Gleichung für das Gaußsche Krümmungsmaß

$$\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = K \tag{4}$$

genügen müssen.

---

[1]) A. Voß. Über diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein konjugiertes System bilden (Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München 1888, 18. Band, pag. 96). — A. Tachauer. Über diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein konjugiertes System bilden (Dissertation, Würzburg 1903).

[2]) Bianchi, pag. 107 und 153.

[3]) Bianchi, pag. 66.

[4]) Bianchi, pag. 90.

Mit Hilfe der Formel:

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{G}{EG-F^2}}\,\frac{\partial}{\partial V}\left(\sqrt{\frac{EG-F^2}{G}}\right)$$

einerseits, welche sich aus der unter (1) angeführten Bedingung $\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = 0$ ergibt, und der Formel:

$$\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{E}{EG-F^2}}\,\frac{\partial}{\partial U}\left(\sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}\right)$$

andererseits, welche man durch Benützung der Bedingung $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0$ erhält, werden die beiden Gleichungen (2) und (3) zu den folgenden:

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(D\sqrt{\frac{G}{EG-F^2}}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial U}\left(D''\sqrt{\frac{E}{EG-F^2}}\right) = 0, \tag{5}$$

während das Gaußsche Krümmungsmaß wegen $D' = 0$ den Wert

$$\frac{D\,D''}{EG-F^2} = K \tag{6}$$

annimmt. Die Integration der Gleichung (5) führt zu den Werten:

$$D = f(U)\sqrt{E}\sin\omega, \quad D'' = g(V)\sqrt{G}\sin\omega,$$

wo $f(U)$ und $g(V)$ beliebige Funktionen von U bzw. V allein darstellen und $\sin\omega = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}$, $\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$ ist, wobei ω der zwischen 0 und π gelegene Winkel ist, welcher in einem Punkte der gesuchten Fläche von den positiven Richtungen der durch ihn gehenden Parameterlinien V und U gebildet wird. Der Fall der abwickelbaren Flächen, bei welchen dann wegen der Bedingungen $D = 0$ sowie $D'' = 0$ bzw. $f(U) = 0$ und $g(V) = 0$ sein muß, wird ausgeschlossen. Unbeschadet der Allgemeinheit des Problems der Voßschen Flächen kann man $f(U) = 1$ sowie $g(V) = 1$ setzen, was durch Änderung der Parameter U und V erreicht wird. Zur Darstellung des Krümmungsmaßes K benütze man die Gleichungen[1]):

$$KE = \frac{\partial}{\partial V}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial U}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}^2$$

sowie

$$\frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial U} = \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\};$$

dann findet man: $K = -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\,\frac{\partial}{\partial U}\left(\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\right)$.

---

[1]) Bianchi, pag. 51 und 91.

Da aber $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = -\sqrt{\frac{E}{G}}\,\frac{\frac{\partial\omega}{\partial V}}{\sin\omega}$, so nimmt das Krümmungsmaß den Wert $K = \frac{1}{\sqrt{EG}}\,\frac{\frac{\partial^2\omega}{\partial U\,\partial V}}{\sin\omega}$ an.

Die Gleichung (6) bekommt dann mit Rücksicht auf (5) die charakteristische Form:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial U\,\partial V} = \sin\omega. \tag{7}$$

Wenden wir uns nun wieder zu den zwei letzten der Bedingungsgleichungen (1) dieses Paragraphen. Dieselben lassen sich auf die Form:

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial U}(\sqrt{G}\cos\omega) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial V}(\sqrt{E}\cos\omega)$$

bringen. Durch Addition dieser zwei Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\sqrt{E}\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial U}\left(\sqrt{G}\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)$$

und durch Subtraktion derselben:

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\sqrt{E}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) = -\frac{\partial}{\partial U}\left(\sqrt{G}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right).$$

Setzt man jetzt $\sqrt{E}\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\partial M}{\partial U}$ und $\sqrt{G}\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\partial M}{\partial V}$, so besagt die erste Gleichung, daß M eine Funktion von U und V ist mit dem totalen Differential:

$$dM = \sqrt{E}\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)dU + \sqrt{G}\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)dV,$$

während die zweite zu der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung führt:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial U\,\partial V}\sin\omega + \frac{\partial M}{\partial U}\frac{\partial\omega}{\partial V} + \frac{\partial M}{\partial V}\frac{\partial\omega}{\partial U} = 0, \tag{8}$$

von welcher bei den folgenden Untersuchungen Gebrauch gemacht werden soll.

Die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung einer Voßschen Fläche bestimmen sich nach dem Vorhergehenden folgendermaßen:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{E} &= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \frac{\partial M}{\partial U}, \quad \sqrt{G} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \frac{\partial M}{\partial V}, \quad F = \sqrt{E G} \cos\omega \\ D &= \sqrt{E} \sin\omega, \qquad D'' = \sqrt{G} \sin\omega, \qquad D' = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Zur Bestimmung der Koordinaten eines Flächenpunktes muß man die Gleichungen[1]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial U} &= \frac{f D' - g D}{e g - f^2} \frac{\partial X}{\partial U} + \frac{f D - e D'}{e g - f^2} \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial x}{\partial V} &= \frac{f D'' - g D'}{e g - f^2} \frac{\partial X}{\partial U} + \frac{f D' - e D''}{e g - f^2} \frac{\partial X}{\partial V} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

nebst den für y und z sich ergebenden analogen benützen.

Die dabei auftretenden Größen e, f, g sind definiert durch:

$$e = \Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial U}\right)^2, \quad f = \Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V}\right), \quad g = \Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)^2,$$

wobei $\frac{\partial X}{\partial U}$, $\frac{\partial X}{\partial V}$ usw. durch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial U} &= \frac{F D' - G D}{E G - F^2} \frac{\partial x}{\partial U} + \frac{F D - E D'}{E G - F^2} \frac{\partial x}{\partial V} \\ \frac{\partial X}{\partial V} &= \frac{F D'' - G D'}{E G - F^2} \frac{\partial x}{\partial U} + \frac{F D' - E D''}{E G - F^2} \frac{\partial x}{\partial V} \end{aligned}\right\} \text{ etc.} \tag{11}$$

gegeben sind.

Die Größen e, f, g sind dann nichts anderes als die Koeffizienten des Quadrates des Linienelementes der zu einer Voßschen Fläche gehörigen Bildkugel[2]); dasselbe hat die Form:

$$ds'^2 = dU^2 - 2 \cos\omega \, dU \, dV + dV^2,$$

da eben hier $e = 1$, $f = -\cos\omega$, $g = 1$ ist.

Nun ist zu konstatieren, daß das gleiche Linienelement auf der Bildkugel aber auch einer auf ihre Haupttangentenkurven $U = \text{const.}$ und $V = \text{const.}$ als Parameterlinien bezogenen pseudosphärischen Fläche vom Krümmungsmaß $K = -\frac{1}{R^2}$ ($R = \text{const.}$) zugehört[3]), deren Fundamentalgrößen die Werte haben:

$$\left.\begin{aligned} E &= R^2, \quad F = R^2 \cos\omega, \quad G = R^2 \\ D &= 0, \quad D' = R \sin\omega, \quad D'' = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

[1]) Bianchi, pag. 124.
[2]) Bianchi, pag. 117.
[3]) Bianchi, pag. 129.

R ist der Radius der pseudosphärischen Fläche, deren Linienelementquadrat die Form hat:

$$dS^2 = R^2(dU^2 + 2\cos\omega\, dU\, dV + dV^2).$$

Man hat im vorhergehenden mithin Folgendes eruiert:

Eine Voßsche Fläche, bezogen auf das konjugierte System ihrer geodätischen Linien U = const., V = const., und eine pseudosphärische Fläche, bezogen auf ihre Haupttangentenkurven U = const., V = const., haben dasselbe sphärische Bild ihrer Parameterlinien; letztere schließen auf beiden Flächen den gleichen Winkel ω ein, welcher der Differentialgleichung (7) genügen muß. Beide Flächen sind demnach durch Parallelismus ihrer Normalen in entsprehenden Punkten einander assoziiert. Natürlich ist einer pseudosphärischen Fläche nicht etwa nur eine Voßsche Fläche, sondern eine ganze Klasse solcher Flächen assoziiert.

Damit haben wir das Material, durch welches der Übergang von einer pseudosphärischen Fläche zu einer ganzen Klasse von Voßschen Flächen bewerkstelligt wird, dargestellt. Ist eine Fläche von konstantem negativem Krümmungsmaß gegeben, so kennt man die Werte von $\frac{\partial\omega}{\partial U}$ und $\frac{\partial\omega}{\partial V}$ sowie die der Richtungscosinus der Flächennormale, nämlich X, Y, Z. Mit Hilfe der ersteren hat man aus der Gleichung (8) die Werte von $\frac{\partial M}{\partial U}$ und $\frac{\partial M}{\partial V}$ zu bestimmen. Hiedurch sind nach (9) die Fundamentalgrößen einer durch Parallelismus der Flächennormalen assoziierten Voßschen Fläche bekannt, so daß man die Koordinaten eines Punktes derselben wegen (10) aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial U} &= -\frac{\sqrt{E}}{\sin\omega}\left(\frac{\partial X}{\partial U} + \cos\omega\,\frac{\partial X}{\partial V}\right) \\ \frac{\partial x}{\partial V} &= -\frac{\sqrt{G}}{\sin\omega}\left(\frac{\partial X}{\partial V} + \cos\omega\,\frac{\partial X}{\partial U}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

und den hiezugehörigen für y und z analogen Gleichungen bestimmen kann.

Man muß nun dazu übergehen, die hier zu behandelnden Enneperschen Flächen, welche im § 1 noch auf das System ihrer Krümmungslinien u', v' bezogen sind, in den Parametern ihrer Haupttangentenkurven darzustellen. Dabei muß wegen der im vorhergehenden Paragraphen unter (39) aufgestellten Bedingung

$$C \geqq [A] + 1$$

zwischen den beiden Hauptfällen $A > 0$ und $A < 0$ unterschieden werden. Der Fall $A = 0$ ist als Spezialfall zu behandeln.

§ 3.

Darstellung der Enneperschen Flächen mit konstantem negativem Krümmungsmaß in den Parametern ihrer Haupttangentenkurven.

Fall I: $A > 0$.

Längs einer Haupttangentenkurve einer Fläche, bezogen auf ein beliebiges krummliniges Koordinatensystem (u, v), muß die Bedingung erfüllt sein:

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0. \tag{1}$$

Nun ist aber hier das System der Parameterlinien das der Krümmungslinien (u', v'), weshalb $D' = 0$ ist. Dabei sind dann D und D'' für die Variablen u', v' gebildet. Für dieselben werden nun nach den Beziehungen (14) und (39) im § 1 die neuen Veränderlichen u_1 und v_1 eingesetzt, so daß die Enneperschen Flächen immer noch auf ihre Krümmungslinien bezogen sind.

Ferner gilt, weil nach Enneper[1])

$$D = \frac{E}{r'} \quad \text{und} \quad D'' = \frac{G}{r''}$$

ist, infolge der Gleichungen (17) des § 1:

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{\sqrt{E}}{r'} \cdot \sqrt{E} = -\frac{i}{R}\,\frac{\sin(i(u_1 + v_1))}{\cos^2(i(u_1 + v_1))} \\ D'' &= \frac{\sqrt{G}}{r''} \cdot \sqrt{G} = +\frac{i}{R}\,\frac{\sin(i(u_1 + v_1))}{\cos^2(i(u_1 + v_1))} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Es sind demnach D und D'' einander entgegengesetzt gleich, so daß sich die Bedingung (1) reduziert auf:

$$dv' = \pm\, du', \tag{3}$$

Diese Differentialgleichung hat für den Übergang zu den Haupttangentenkurven die Gleichungen:

$$v' = u' + 2RU, \quad v' = -u' + 2RV$$

zur Folge, wo das zweite Glied auf der rechten Seite jeweils die Rolle der Integrationskonstante spielt. Hieraus folgt:

$$v' = R(V + U), \quad u' = R(V - U). \tag{4}$$

---

[1]) Vgl. auch Bianchi, pag. 101.

Damit ist der Übergang von den Parametern (v', u') der Krümmungslinien zu den Parametern (V, U) der Haupttangentenkurven gegeben.

Aus der Gleichung (39) des § 1 erhält man:

$$u' = \int_0^{u_1} \frac{R\,du_1}{\sqrt{C + A\cos(2i\,u_1) - 1}} = \frac{R}{\sqrt{C + A - 1}} \int_0^{u_1} \frac{du_1}{\sqrt{1 - \frac{2A}{C + A - 1}\sin^2(i\,u_1)}}.$$

Da $C > 0$ und $A > 0$, ist der Bruch $\frac{2A}{C + A - 1} < 1$ wegen (38), § 1.

Setzt man nun:

$$1 - \frac{2A}{C + A - 1} = \varkappa^2, \quad 1 - \varkappa^2 = \varkappa'^2, \quad \sin(i\,u_1) = i\,\frac{\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}},$$

so erhält man:

$$u' = \frac{\varkappa' R}{\sqrt{2A}} \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - \varkappa^2\tau^2)}}.$$

Hieraus ergibt sich, wenn man $\frac{\sqrt{2A}}{\varkappa' R}\,u' = u$ setzt:

$$\tau = \sin am\left[\frac{\sqrt{2A}}{\varkappa' R}\,u',\ \begin{matrix}\text{Modul}\,\varkappa \\ \varkappa < 1\end{matrix}\right] \quad \text{oder} \quad \tau = sn\,u. \tag{5}$$

Die Gleichung (14), § 1 liefert:

$$v' = \frac{R}{\sqrt{C - A}} \int_0^{v_1} \frac{dv_1}{\sqrt{1 + \frac{2A}{C - A}\sin^2(i\,v_1)}}.$$

$\frac{2A}{C - A}$ ist positiv für den Fall: $C > 0$, $A > 0$.

Setzt man jetzt:

$$\frac{C + A}{C - A} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad 1 - \lambda^2 = \lambda'^2, \quad \sin(i\,v_1) = i\,\frac{\lambda\psi}{\sqrt{1 - \lambda^2\psi^2}},$$

so ergibt sich die Beziehung:

$$v' = \frac{R\lambda'}{\sqrt{2A}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - \psi^2)(1 - \lambda^2\psi^2)}}$$

und mittels der Substitution $\frac{\sqrt{2A}}{\lambda' R} v' = v$:

$$\psi = \sin am\left[\frac{\sqrt{2A}}{\lambda' R} v', \begin{matrix}\text{Modul } \lambda \\ \lambda > 1\end{matrix}\right] \text{ oder } \psi = snv. \tag{6}$$

Hinsichtlich des Zusammenhanges der Moduln $\varkappa$ und λ der elliptischen Funktionen snu bzw. snv sowie ihrer Komplementärmoduln $\varkappa'$ und λ' sind noch folgende Relationen zu beachten.

Da $\lambda^2 = \frac{C-A}{C+A}$ und $\varkappa^2 = \frac{C-A-1}{C+A-1}$, ist $\lambda^2 > \varkappa^2$.

Ferner gilt:

$$\frac{1}{C+A} = \frac{\lambda^2-\varkappa^2}{\varkappa'^2}, \quad \frac{1}{C-A} = \frac{\lambda^2-\varkappa^2}{\lambda^2\varkappa'^2},$$

$$\frac{1}{C+A-1} = \frac{\lambda^2-\varkappa^2}{\lambda'^2}, \quad \sqrt{2A} = \frac{\lambda'\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}.$$

Die Beziehungen: $\frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}} = \sqrt{C+A}$ und $\frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}} = \sqrt{C+A-1}$ sind dann anzuwenden, wenn in speziellen Fällen für die auf ihrer linken Seite stehenden Quotienten unbestimmte Werte auftreten.

In der Folge werden die Moduln $\varkappa$ und λ oder deren Komplementärmoduln bei den ihnen entsprechenden elliptischen Funktionen nicht eigens notiert werden, so daß also stets darauf zu achten ist, daß den Funktionen snu, cnu, dnu der Modul $\varkappa$ mit seinem Komplementärmodul $\varkappa'$ sowie den Funktionen snv, cnv, dnv der Modul λ mit dem Komplementärmodul λ' zugehört.

Wegen der Gleichungen (5) und (6) erhält man nun:

$$\left.\begin{aligned} \sin(iu_1) = i\frac{snu}{cnu}, \quad \cos(iu_1) = \frac{1}{cnu}; \\ \sin(iv_1) = i\frac{\lambda snv}{dnv}, \quad \cos(iv_1) = \frac{1}{dnv}; \\ \text{mithin} \quad tg(i(u_1+v_1)) = i\frac{snu+\lambda snv}{1+\lambda snu\, snv}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Da ferner gilt:

$$\sqrt{C-A\cos(2iv_1)} = \sqrt{C-A}\,\frac{cnv}{dnv},$$

$$\int\sqrt{C-A\cos(2iv_1)}\,dv_1 = \lambda\sqrt{C-A}\int\frac{cn^2v}{dn^2v}\,dv$$

und $C + A\cos(2iu_1) = (C + A)\dfrac{1-\lambda^2 sn^2 u}{cn^2 u}$, wobei $1-\lambda^2 sn^2 u + dn^2 u$ zu beachten ist, so repräsentieren sich die Gleichungen (35), (36) und (37) im § 1, letztere unter Benützung von Gleichung (39), in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi,\ y = \varrho\sin\varphi \\ z\frac{\sqrt{C+A}}{R} &= \lambda\int_0^v \frac{cn^2 v}{dn^2 v}dv - \frac{cnv}{dnv}\frac{snu + \lambda snv}{1+\lambda snu\, snv} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$\varrho\frac{\sqrt{C-A}}{R} = \frac{dnv\sqrt{1-\lambda^2 sn^2 u}}{1+\lambda snu\, snv} \quad (9)$$

$$\frac{d\varphi}{dn'} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{C-A}{C+A}}\frac{cn^2 u}{1-\lambda^2 sn^2 u}. \quad (10)$$

Geht man jetzt zu den Parametern der Haupttangentenkurven über, indem man die hiezu nötigen, aus dem Vorhergehenden sich ergebenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{2A}}{\varkappa' R}u' = \frac{\sqrt{2A}}{\varkappa'}(V-U) \\ v &= \frac{\sqrt{2A}}{\lambda' R}v' = \frac{\sqrt{2A}}{\lambda'}(V+U) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

benützt, so werden die hier in Frage kommenden Enneperschen Flächen dargestellt durch:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi,\ y = \varrho\sin\varphi \\ z\frac{\sqrt{C+A}}{R} &= \lambda\int^{\frac{\sqrt{2A}}{\lambda'}(V+U)} \frac{cn^2 v}{dn^2 v}dv \\ &- \frac{cn\left(\frac{\sqrt{2A}}{\lambda'}(V+U)\right)}{dn\left(\frac{\sqrt{2A}}{\lambda'}(V+U)\right)}\cdot\frac{sn\left(\frac{\sqrt{2A}}{\varkappa'}(V-U)\right)+\lambda sn\left(\frac{\sqrt{2A}}{\lambda'}(V+U)\right)}{1+\lambda sn\left(\frac{\sqrt{2A}}{\varkappa'}(V-U)\right)sn\left(\frac{\sqrt{2A}}{\lambda'}(V+U)\right)} \end{aligned}\right\} \quad (8^*)$$

$$\varrho\frac{\sqrt{C-A}}{A} = \frac{dn\left(\frac{\sqrt{2A}}{\lambda'}(V+U)\right)\sqrt{1-\lambda^2 sn^2\left(\frac{\sqrt{2A}}{\varkappa'}(V-U)\right)}}{1+\lambda sn\left(\frac{\sqrt{2A}}{\varkappa'}(V-U)\right)sn\left(\frac{\sqrt{2A}}{\lambda'}(V+U)\right)} \quad (9^*)$$

$$\frac{d\varphi}{du'} = \frac{\sqrt{C-A}}{R\sqrt{C+A}} \frac{\operatorname{cn}^2\left(\frac{\sqrt{2A}}{\varkappa'}(V-U)\right)}{1-\lambda^2\operatorname{sn}^2\left(\frac{\sqrt{2A}}{\varkappa'}(V-U)\right)}. \qquad (10^*)$$

Sind die zu behandelnden Enneperschen Flächen richtig auf das System der Haupttangentenkurven als Parameterlinien bezogen, dann müssen die Fundamentalgrößen jene Werte annehmen, wie sie in den Relationen (12), § 2 angegeben wurden. Dies ist auch tatsächlich, wie die Berechnung ergibt, der Fall. Es ist nämlich $E = G = R^2$.

Ferner erhält man:

$$F = R^2\left[\frac{2(\operatorname{snu}+\lambda\operatorname{snv})^2}{(1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv})^2} - 1\right].$$

Da für den Winkel ω der Parameterkurven die Beziehung $\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$ gilt, so ergibt sich:

$$\cos\omega = 2\left[\frac{\operatorname{snu}+\lambda\operatorname{snv}}{1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv}}\right]^2 - 1. \qquad (12)$$

Mithin ist $F = R^2\cos\omega$ und das Quadrat des Linienelements hat die Form:

$$dS^2 = R^2(dU^2 + 2\cos\omega\, dU\, dV + dV^2).$$

Aus der Gleichung (12) resultiert ferner:

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\operatorname{cnu}\operatorname{dnv}}{1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv}}, \quad \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\operatorname{snu}+\lambda\operatorname{snv}}{1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv}}. \qquad (13)$$

Mit Hilfe dieser Werte kann manche Abkürzung eintreten.

Schließlich seien noch die Werte der Richtungscosinus der Flächennormale notiert.

$$\left.\begin{aligned}
X &= \frac{\lambda'}{\varkappa'}\frac{\operatorname{dnu}}{\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sn}^2 u}}\sin\varphi \\
&\quad - \frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\frac{\operatorname{cnu}(\lambda\operatorname{snu}+\operatorname{snv})}{\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sn}^2 u}(1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv})}\cos\varphi \\
Y &= -\frac{\lambda'}{\varkappa'}\frac{\operatorname{dnu}}{\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sn}^2 u}}\cos\varphi \\
&\quad - \frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\frac{\operatorname{cnu}(\lambda\operatorname{snu}+\operatorname{snv})}{\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sn}^2 u}(1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv})}\sin\varphi \\
Z &= -\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\operatorname{cnv}}{\operatorname{dnv}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Ferner sei hier auf die Werte der Koeffizienten des Linienelementquadrates der Bildkugel hingewiesen:

$$e = \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial U}\right)^2 = 1, \quad f = \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial U}\,\frac{\partial X}{\partial V}\right) = -\cos\omega, \quad g = \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)^2 = 1.$$

Mithin gilt: $ds'^2 = dU^2 - 2\cos\omega\, dU\, dV + dV^2$.

Fall II: $A < 0$.

Ist jetzt A negativ, so kann man $A = -A_1$ setzen, wobei aber dann A_1 nur positiv ist. Aus Gleichung (39), § 1 wird infolgedessen:

$$u' = \frac{R}{\sqrt{C - A_1 - 1}} \int_0^{u_1} \frac{du_1}{\sqrt{1 + \frac{2A_1}{C - A_1 - 1}\sin^2(iu_1)}}.$$

Wegen der Bedingung $C \geqq [A] + 1$ muß auch gelten: $C - 1 \geqq A_1$.

Setzt man nun:

$$\frac{2A_1}{C - A_1 - 1} = \frac{1}{\varkappa_1^2} - 1, \quad 1 - \varkappa_1^2 = \varkappa_1'^2; \quad \sin(iu_1) = i\frac{\varkappa_1 \tau}{\sqrt{1 - \varkappa_1^2 \tau^2}},$$

so findet man:

$$\frac{\sqrt{2A_1}}{\varkappa_1' R}\, u' = u = \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - \varkappa_1^2 \tau^2)}}$$

oder

$$\tau = \sin am\left[\frac{2\sqrt{A_1}}{\varkappa_1' R}\, u', \quad \begin{matrix}\text{Modul } \varkappa_1 \\ \varkappa_1 < 1\end{matrix}\right], \text{ kurz: } \tau = sn\, u. \tag{15}$$

Die Beziehung (14), § 1 führt jetzt zu:

$$v' = \frac{R}{\sqrt{C + A_1}} \int_0^{v_1} \frac{dv_1}{\sqrt{1 - \frac{2A_1}{C + A_1}\sin^2(iv_1)}}.$$

Die Substitutionen:

$$1 - \frac{2A_1}{C + A_1} = \lambda_1^2, \quad 1 - \lambda_1^2 = \lambda_1'^2; \quad \sin(iv_1) = i\frac{\psi}{\sqrt{1 - \psi^2}}$$

liefern:

$$\frac{\sqrt{2A_1}}{\lambda_1' R}\, v' = v = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - \psi^2)(1 - \lambda_1^2 \psi^2)}}$$

oder:

$$\psi = \sin am\left[\frac{\sqrt{2A_1}}{\lambda_1' R}\, v', \quad \begin{matrix}\text{Modul } \lambda_1 \\ \lambda_1 < 1\end{matrix}\right], \text{ kurz: } \psi = sn\, v. \tag{16}$$

Für die Moduln $\varkappa_1$ und λ_1 sowie deren Komplementärmoduln ist Folgendes zu beachten:

$$\varkappa_1^2 = \frac{C - A_1 - 1}{C + A_1 - 1}, \quad \lambda_1^2 = \frac{C - A_1}{C + A_1}, \quad \lambda_1^2 > \varkappa_1^2;$$

$$\frac{1}{C + A_1} = \frac{\lambda_1^2 - \varkappa_1^2}{\varkappa_1'^2}, \quad \frac{1}{C - A_1} = \frac{\lambda_1^2 - \varkappa_1^2}{\lambda_1^2 \varkappa_1'^2},$$

$$\frac{1}{C + A_1 - 1} = \frac{\lambda_1^2 - \varkappa_1^2}{\lambda_1'^2}, \quad \sqrt{2A_1} = \frac{\lambda_1' \varkappa_1'}{\sqrt{\lambda_1^2 - \varkappa_1^2}}.$$

Analog (7) hat man hier:

$$\left.\begin{aligned} \sin(iu_1) = i\frac{\varkappa_1 \operatorname{snu}}{\operatorname{dnu}}, \quad \cos(iu_1) = \frac{1}{\operatorname{dnu}}; \\ \sin(iv_1) = i\frac{\operatorname{snv}}{\operatorname{cnv}}, \quad \cos(iv_1) = \frac{1}{\operatorname{cnv}}; \\ \text{folglich} \quad \operatorname{tg}(i(u_1 + v_1)) = i\frac{\varkappa_1 \operatorname{snu} \operatorname{snv} + \operatorname{snv}}{1 + \varkappa_1 \operatorname{snu} \operatorname{snv}}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Da $\sqrt{C + A_1 \cos(2iv_1)} = \sqrt{C + A_1}\,\frac{\operatorname{dnv}}{\operatorname{cnv}}$ und $C - A_1 \cos(2iu_1)$ $= (C - A_1)\,\frac{1 - \frac{\varkappa_1^2}{\lambda_1^2}\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}$, so sind die Enneperschen Flächen für diesen Fall dargestellt durch:

$$\left.\begin{aligned} x = \varrho \cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\varphi \\ z\,\frac{\sqrt{C - A_1}}{R} = \int_0^v \frac{\operatorname{dn}^2 v}{\operatorname{cn}^2 v}\,dv - \frac{\operatorname{dnv}}{\operatorname{cnv}}\,\frac{\varkappa_1 \operatorname{snu} + \operatorname{snv}}{1 + \varkappa_1 \operatorname{snu} \operatorname{snv}} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

$$\varrho\,\frac{\sqrt{C + A_1}}{R} = \frac{\operatorname{cnv}\sqrt{1 - \left(\frac{\varkappa_1}{\lambda_1}\right)^2 \operatorname{sn}^2 u}}{1 + \varkappa_1 \operatorname{snu} \operatorname{snv}} \quad (19)$$

$$\frac{d\varphi}{du'} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{C + A_1}{C - A_1}}\,\frac{\operatorname{dn}^2 u}{1 - \frac{\varkappa_1^2}{\lambda_1^2}\operatorname{sn}^2 u}. \quad (20)$$

Der Übergang zu den Parametern der Haupttangentenkurven wird vermittelt durch die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} u = \frac{\sqrt{2A_1}}{\varkappa_1' R}\,u' = \frac{\sqrt{2A_1}}{\varkappa_1'}(V - U) \\ v = \frac{\sqrt{2A_1}}{\lambda_1' R}\,v' = \frac{\sqrt{2A_1}}{\lambda_1'}(V + U). \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Man erhält so:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi \\ z\,\frac{\sqrt{C-A_1}}{R} &= \int_0^{\frac{\sqrt{2A_1}}{\lambda_1'}(V+U)} \frac{dn^2 v}{cn^2 v}\,dv - \frac{dn\left(\frac{\sqrt{2A_1}}{\lambda_1'}(V+U)\right)}{cn\left(\frac{\sqrt{2A_1}}{\lambda_1'}(V+U)\right)} \\ &\quad \cdot \frac{\varkappa_1 sn\left(\frac{\sqrt{2A_1}}{\varkappa_1'}(V-U)\right) + sn\left(\frac{\sqrt{2A_1}}{\lambda_1'}(V+U)\right)}{1+\varkappa_1 sn\left(\frac{\sqrt{2A_1}}{\varkappa_1'}(V-U)\right) sn\left(\frac{\sqrt{2A_1}}{\lambda_1'}(V+U)\right)} \end{aligned}\right\} \quad (18^*)$$

$$\varrho\,\frac{\sqrt{C+A_1}}{R} = \frac{cn\left(\frac{\sqrt{2A_1}}{\lambda_1'}(V+U)\right)\sqrt{1-\left(\frac{\varkappa_1}{\lambda_1}\right)^2 sn^2\left(\frac{\sqrt{2A_1}}{\varkappa_1'}(V-U)\right)}}{1+\varkappa_1 sn\left(\frac{\sqrt{2A_1}}{\varkappa_1'}(V-U)\right) sn\left(\frac{\sqrt{2A_1}}{\lambda_1'}(V+U)\right)} \quad (19^*)$$

$$\frac{d\varphi}{du'} = \frac{\sqrt{C+A_1}}{R\sqrt{C-A_1}} \cdot \frac{dn^2\left(\frac{\sqrt{2A_1}}{\varkappa_1'}(V-U)\right)}{1-\left(\frac{\varkappa_1}{\lambda_1}\right)^2 sn^2\left(\frac{\sqrt{2A_1}}{\varkappa_1'}(V-U)\right)}. \quad (20^*)$$

Die Fundamentalgrößen erster Ordnung haben folgende Werte:

$$E = G = R^2,$$

$$F = R^2\left[\frac{2(\varkappa_1 snu + snv)^2}{(1+\varkappa_1 snu\, snv)^2} - 1\right] = R^2\cos\omega.$$

Hieraus folgt:

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{dnu\, cnv}{1+\varkappa_1 snu\, snv}, \quad \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\varkappa_1 snu + snv}{1+\varkappa_1 snu\, snv}. \quad (22)$$

Es mögen nun noch die Werte der Richtungscosinus der Flächennormale angeführt werden:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\varkappa_1\lambda_1'}{\lambda_1\varkappa_1'} \cdot \frac{cnu}{\sqrt{1-\left(\frac{\varkappa_1}{\lambda_1}\right)^2 sn^2 u}}\sin\varphi \\ &\quad - \frac{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}{\lambda_1^2\varkappa_1'} \cdot \frac{dnu\,(\varkappa_1 snu + \lambda_1^2 snv)}{\sqrt{1-\left(\frac{\varkappa_1}{\lambda_1}\right)^2 sn^2 u\,(1+\varkappa_1 snu\, snv)}}\cos\varphi \\ Y &= -\frac{\varkappa_1\lambda_1'}{\lambda_1\varkappa_1'} \cdot \frac{cnu}{\sqrt{1-\left(\frac{\varkappa_1}{\lambda}\right)^2 sn^2 u}}\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

$$-\frac{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}{\lambda_1^2\varkappa_1'}\,\frac{\mathrm{dnu}\,(\varkappa_1\,\mathrm{snu}+\lambda_1^2\,\mathrm{snv})}{\sqrt{1-\left(\frac{\varkappa_1}{\lambda_1}\right)^2\mathrm{sn}^2\mathrm{u}\,(1+\varkappa_1\,\mathrm{snu}\,\mathrm{snv})}}\sin\varphi$$

$$\mathrm{Z}=-\frac{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}{\lambda_1\varkappa_1'}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\mathrm{dnv}}{\mathrm{cnv}}.$$

§ 4.

Übergang von den Enneperschen Flächen zu den entsprechenden Voßschen Flächen.

Zur Bewerkstelligung dieses Überganges ist, wie im § 2 gezeigt wurde, die folgende part. Diff.-Gleichung zweiter Ordnung notwendig:

$$\frac{\partial^2\mathrm{M}}{\partial\mathrm{U}\,\partial\mathrm{V}}\sin\omega+\frac{\partial\omega}{\partial\mathrm{V}}\,\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\mathrm{U}}+\frac{\partial\omega}{\partial\mathrm{U}}\,\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\mathrm{V}}=0.$$

In derselben müssen aber noch die Werte von $\frac{\partial\omega}{\partial\mathrm{U}}$ und $\frac{\partial\omega}{\partial\mathrm{V}}$ eingesetzt werden. Dieselben sind für den

$$\text{Fall: } \mathrm{A}>0\begin{cases}\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathrm{U}}=-2\sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)\left(\dfrac{\lambda\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\,\dfrac{\mathrm{cnv}}{\mathrm{dnv}}-\dfrac{\lambda'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\,\dfrac{\mathrm{dnu}}{\mathrm{cnu}}\right)\\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\mathrm{V}}=-2\sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)\left(\dfrac{\lambda\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\,\dfrac{\mathrm{cnv}}{\mathrm{dnv}}+\dfrac{\lambda'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\,\dfrac{\mathrm{dnu}}{\mathrm{cnu}}\right)\end{cases}\tag{1}$$

und für den

$$\text{Fall: } \mathrm{A}<0\begin{cases}\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathrm{U}}=-2\sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)\left(\dfrac{\varkappa_1'}{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}\,\dfrac{\mathrm{dnv}}{\mathrm{cnv}}-\dfrac{\varkappa_1\lambda_1'}{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}\,\dfrac{\mathrm{cnu}}{\mathrm{dnu}}\right)\\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\mathrm{V}}=-2\sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)\left(\dfrac{\varkappa_1'}{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}\,\dfrac{\mathrm{dnv}}{\mathrm{cnv}}+\dfrac{\varkappa_1\lambda_1'}{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}\,\dfrac{\mathrm{cnu}}{\mathrm{dnu}}\right).\end{cases}\tag{1*}$$

Es sei an dieser Stelle daran erinnert, daß $\frac{\partial\omega}{\partial\mathrm{U}}$ und $\frac{\partial\omega}{\partial\mathrm{V}}$ der charakteristischen Gleichung: $\frac{\partial^2\omega}{\partial\mathrm{U}\,\partial\mathrm{V}}=\sin\omega$ genügen.

Zur Bestimmung der Koordinaten eines Punktes der fraglichen Voßschen Flächen müssen dann die Gleichungen (9) und (13) im § 2 verwendet werden. In den letzteren treten auch die ersten part. Ableitungen der Richtungscosinus X, Y, Z der Flächennormale auf. Die Werte von X und Y sollen deshalb in anderer Form hier dargestellt werden.

Für den Fall: $A > 0$ erhielt man im § 3, Gleichung (14):

$$X = -\left[\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\,\frac{\operatorname{cnu}(\lambda\operatorname{snu}+\operatorname{snv})}{\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sn}^2\mathrm{u}}\,(1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv})}\cos\varphi - \frac{\lambda'}{\varkappa'}\,\frac{\operatorname{dnu}}{\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sn}^2\mathrm{u}}}\sin\varphi\right]$$

$$Y = -\left[\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\,\frac{\operatorname{cnu}(\lambda\operatorname{snu}+\operatorname{snv})}{\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sn}^2\mathrm{u}}\,(1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv})}\sin\varphi + \frac{\lambda'}{\varkappa'}\,\frac{\operatorname{dnu}}{\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sn}^2\mathrm{u}}}\cos\varphi\right].$$

Setzen wir nun:

$$\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\,\frac{\operatorname{cnu}(\lambda\operatorname{snu}+\operatorname{snv})}{\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sn}^2\mathrm{u}}\,(1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv})} = \varrho'\cos\psi,$$

$$\frac{\lambda'}{\varkappa'}\,\frac{\operatorname{dnu}}{\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sn}^2\mathrm{u}}} = \varrho'\sin\psi, \qquad (2)$$

so erhalten wir:

$$X = -\varrho'\cos\chi, \quad Y = -\varrho'\sin\chi,$$

wobei

$$\chi = \varphi+\psi, \quad \varrho' = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\,\frac{\operatorname{cnu}\operatorname{cnv}}{1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv}}\right)^2},$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\,\frac{\operatorname{dnu}(1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv})}{\operatorname{cnu}(\lambda\operatorname{snu}+\operatorname{snv})}. \qquad (3)$$

Ferner ist zu beachten:

$$\frac{\partial\chi}{\partial U} = -\frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\,\frac{1}{\left(\frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\,\frac{\operatorname{cnu}\operatorname{cnv}}{1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv}}\right)^2}\right)^2}$$

$$\cdot\frac{\operatorname{cn}^2\mathrm{u}}{1-\lambda^2\operatorname{sn}^2\mathrm{u}}\left[\frac{\lambda'^2\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\,\frac{\lambda\operatorname{snu}+\operatorname{snv}}{1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv}}\cdot\frac{\operatorname{snu}}{\operatorname{cn}^2\mathrm{u}} - \frac{\lambda\lambda'^2}{\varkappa'\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\left(\frac{\operatorname{dnu}\operatorname{cnv}}{1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv}}\right)^2\right.$$

$$+\frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\,\frac{\operatorname{cnu}\operatorname{dnu}\operatorname{cnv}\operatorname{dnv}}{(1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv})^2}\,\frac{1-\lambda^2\operatorname{sn}^2\mathrm{u}}{\operatorname{cn}^2\mathrm{u}}$$

$$\left.+\frac{\lambda\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\,\frac{\operatorname{cnu}\operatorname{cnv}}{1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv}}\right)^2\right)\right]$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial V} = +\frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\,\frac{1}{\left(\frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\,\frac{\operatorname{cnu}\operatorname{cnv}}{1+\lambda\operatorname{snu}\operatorname{snv}}\right)^2}\right)^2}$$

$$\cdot\frac{\mathrm{cn}^2\mathrm{u}}{1-\lambda^2\mathrm{sn}^2\mathrm{u}}\left[\frac{\lambda'^2\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\frac{\lambda\mathrm{snu}+\mathrm{snv}}{1+\lambda\mathrm{snusnv}}\cdot\frac{\mathrm{snu}}{\mathrm{cn}^2\mathrm{u}}-\frac{\lambda\lambda'^2}{\varkappa'\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\left(\frac{\mathrm{dnucnv}}{1+\lambda\mathrm{snusnv}}\right)^2\right.$$
$$-\frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\frac{\mathrm{cnudnucnvdnv}}{(1+\lambda\mathrm{snusnv})^2}\frac{1-\lambda^2\mathrm{sn}^2\mathrm{u}}{\mathrm{cn}^2\mathrm{u}}$$
$$\left.+\frac{\lambda\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\frac{\mathrm{cnucnv}}{1+\lambda\mathrm{snusnv}}\right)^2\right)\right].$$

Oder:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\chi}{\partial\mathrm{U}}&=-\frac{\frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}}{\left(\frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\frac{\mathrm{cnucnv}}{1+\lambda\mathrm{snusnv}}\right)^2}\right)^2}\\&\cdot\frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\left[\frac{\lambda\mathrm{snu}+\mathrm{snv}}{1+\lambda\mathrm{snusnv}}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)+\frac{\lambda'}{\varkappa'}\frac{\mathrm{dnucnv}}{1+\lambda\mathrm{snusnv}}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]\\\frac{\partial\chi}{\partial\mathrm{V}}&=+\frac{\frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}}{\left(\frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\frac{\mathrm{cnucnv}}{1+\lambda\mathrm{snusnv}}\right)^2}\right)^2}\\&\cdot\frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\left[\frac{\lambda\mathrm{snu}+\mathrm{snv}}{1+\lambda\mathrm{snusnv}}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)-\frac{\lambda'}{\varkappa'}\frac{\mathrm{dnucnv}}{1+\lambda\mathrm{snusnv}}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right].\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Schließlich kann man noch schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\chi}{\partial\mathrm{U}}&=-\frac{1}{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\frac{\mathrm{cnucnv}}{1+\lambda\mathrm{snusnv}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial\mathrm{z}}{\partial\mathrm{U}}\\\frac{\partial\chi}{\partial\mathrm{V}}&=+\frac{1}{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\frac{\mathrm{cnucnv}}{1+\lambda\mathrm{snusnv}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial\mathrm{z}}{\partial\mathrm{U}}.\end{aligned}\right\}\quad(4')$$

Da

$$\frac{\partial\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\frac{\mathrm{cnucnv}}{1+\lambda\mathrm{snusnv}}\right)^2}}{\partial\mathrm{U}}$$
$$=-\frac{\frac{\mathrm{cnucnv}}{1+\lambda\mathrm{snusnv}}}{\frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\frac{\mathrm{cnucnv}}{1+\lambda\mathrm{snusnv}}\right)^2}}$$
$$\cdot\left[\frac{\lambda\mathrm{snu}+\mathrm{snv}}{1+\lambda\mathrm{snusnv}}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)-\frac{\lambda'}{\varkappa'}\frac{\mathrm{dnucnv}}{1+\lambda\mathrm{snusnv}}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right],$$

$$\frac{\partial \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\,\frac{\mathrm{cnu\,cnv}}{1+\lambda\,\mathrm{snu\,snv}}\right)^2}}{\partial V}$$

$$= \frac{\frac{\mathrm{cnu\,cnv}}{1+\lambda\,\mathrm{snu\,snv}}}{\frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\,\frac{\mathrm{cnu\,cnv}}{1+\lambda\,\mathrm{snu\,snv}}\right)^2}} \cdot\left[\frac{\lambda\,\mathrm{snu}+\mathrm{snv}}{1+\lambda\,\mathrm{snu\,snv}}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)+\frac{\lambda'}{\varkappa'}\,\frac{\mathrm{dnu\,cnv}}{1+\lambda\,\mathrm{snu\,snv}}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right],$$

so gilt für die gesuchten Voßschen Flächen nach (13) im § 2:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial U} &= \sqrt{E}\left[\frac{1}{T}\,\frac{\mathrm{cnu\,cnv}}{1+\lambda\,\mathrm{snu\,snv}}\left(\frac{\lambda\,\mathrm{snu}+\mathrm{snv}}{1+\lambda\,\mathrm{snu\,snv}}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\lambda'}{\varkappa'}\,\frac{\mathrm{dnu\,cnv}}{1+\lambda\,\mathrm{snu\,snv}}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\cos\chi\\
&\quad+\frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\,\frac{1}{T}\left(\frac{\lambda\,\mathrm{snu}+\mathrm{snv}}{1+\lambda\,\mathrm{snu\,snv}}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{\lambda'}{\varkappa'}\,\frac{\mathrm{dnu\,cnv}}{1+\lambda\,\mathrm{snu\,snv}}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\sin\chi\right]\\
\frac{\partial x}{\partial V} &= \sqrt{G}\left[\frac{1}{T}\,\frac{\mathrm{cnu\,cnv}}{1+\lambda\,\mathrm{snu\,snv}}\left(\frac{\lambda\,\mathrm{snu}+\mathrm{snv}}{1+\lambda\,\mathrm{snu\,snv}}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\lambda'}{\varkappa'}\,\frac{\mathrm{dnu\,cnv}}{1+\lambda\,\mathrm{snu\,snv}}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\cos\chi\\
&\quad-\frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\,\frac{1}{T}\left(\frac{\lambda\,\mathrm{snu}+\mathrm{snv}}{1+\lambda\,\mathrm{snu\,snv}}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left.\left.-\frac{\lambda'}{\varkappa'}\,\frac{\mathrm{dnu\,cnv}}{1+\lambda\,\mathrm{snu\,snv}}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\sin\chi\right].
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Dazu gehören die entsprechenden Gleichungen für y und z. Der Ausdruck: $\frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'}\,\frac{\mathrm{cnu\,cnv}}{1+\lambda\,\mathrm{snu\,snv}}\right)^2}$ wurde mit T bezeichnet.

Für den Fall: $A < 0$ gestaltet sich die Sache analog. Man erhält da aus den Gleichungen (23), § 3 Folgendes:

$$\frac{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}{\lambda_1^2\varkappa_1'}\,\frac{\mathrm{dn\,u\,(\varkappa_1 sn\,u+\lambda_1^2 sn\,v)}}{\sqrt{1-\left(\frac{\varkappa_1}{\lambda_1}\right)^2 \mathrm{sn^2 u\,(1+\varkappa_1 sn\,u\,sn\,v)}}}=\varrho'\cos\psi,$$

$$\frac{\varkappa_1\lambda_1'}{\lambda_1\varkappa_1'}\,\frac{\mathrm{cn\,u}}{\sqrt{1-\left(\frac{\varkappa_1}{\lambda_1}\right)^2 \mathrm{sn^2 u}}}=\varrho'\sin\psi \qquad (2^*)$$

$$X=-\varrho'\cos\chi,\quad Y=-\varrho'\sin\chi,$$

$$\chi=\varphi+\psi,\quad \varrho'=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}{\lambda_1\varkappa_1'}\,\frac{\mathrm{dn\,u\,dn\,v}}{1+\varkappa_1 sn\,u\,sn\,v}\right)^2},$$

$$\mathrm{tg}\,\psi=\lambda_1\frac{\varkappa_1\lambda_1'}{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}\,\frac{\mathrm{cn\,u\,(1+\varkappa_1 sn\,u\,sn\,v)}}{\mathrm{dn\,u\,(\varkappa_1 sn\,u+\lambda_1^2 sn\,v)}} \qquad (3^*)$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial U}=-\frac{\lambda_1^2\varkappa_1'^2}{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}\,\frac{1}{\left(\frac{\lambda_1\varkappa_1'}{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}{\lambda_1\varkappa_1'}\,\frac{\mathrm{dn\,u\,dn\,v}}{1+\varkappa_1 sn\,u\,sn\,v}\right)^2}\right)^2}$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\lambda_1}\frac{(\varkappa_1 sn\,u+\lambda_1^2 sn\,v)(\varkappa_1 sn\,u+sn\,v)}{(1+\varkappa_1 sn\,u\,sn\,v)^2}+\frac{\lambda_1'\varkappa_1}{\lambda_1\varkappa_1'}\frac{cn\,u\,dn\,u\,cn\,v\,dn\,v}{(1+\varkappa_1 sn\,u\,sn\,v)^2}\right]$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial V}=+\frac{\lambda_1^2\varkappa_1'^2}{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}\,\frac{1}{\left(\frac{\lambda_1\varkappa_1'}{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}{\lambda_1\varkappa_1'}\,\frac{\mathrm{dn\,u\,dn\,v}}{1+\varkappa_1 sn\,u\,sn\,v}\right)^2}\right)^2} \qquad (4^*)$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\lambda_1}\frac{(\varkappa_1 sn\,u+\lambda_1^2 sn\,v)(\varkappa_1 sn\,u+sn\,v)}{(1+\varkappa_1 sn\,u\,sn\,v)^2}-\frac{\lambda_1'\varkappa_1}{\lambda_1\varkappa_1'}\frac{cn\,u\,dn\,u\,cn\,v\,dn\,v}{(1+\varkappa_1 sn\,u\,sn\,v)^2}\right],$$

oder, wenn man $\dfrac{\lambda_1\varkappa_1'}{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}{\lambda_1\varkappa_1'}\,\dfrac{\mathrm{dn\,u\,dn\,v}}{1+\varkappa_1 sn\,u\,sn\,v}\right)^2}=T'$

setzt und (22), § 3 verwendet:

$$\frac{\partial\chi}{\partial U}=-\frac{\frac{\lambda_1\varkappa_1'}{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}}{T'^2}\,\frac{\lambda_1\varkappa_1'}{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}\left[\frac{1}{\lambda_1}\frac{\varkappa_1 sn\,u+\lambda_1^2 sn\,v}{1+\varkappa_1 sn\,u\,sn\,v}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_1'\varkappa_1}{\lambda_1\varkappa_1'}\frac{cn\,u\,dn\,v}{1+\varkappa_1 sn\,u\,sn\,v}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial V}=+\frac{\frac{\lambda_1\varkappa_1'}{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}}{T'^2}\,\frac{\lambda_1\varkappa_1'}{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}\left[\frac{1}{\lambda_1}\frac{\varkappa_1 sn\,u+\lambda_1^2 sn\,v}{1+\varkappa_1 sn\,u\,sn\,v}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda_1'\varkappa_1}{\lambda_1\varkappa_1'}\frac{cn\,u\,dn\,v}{1+\varkappa_1 sn\,u\,sn\,v}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right].$$

Ferner:

$$\frac{\partial \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}{\lambda_1\varkappa_1'}\,\frac{\mathrm{dnu\,dnv}}{1+\varkappa_1\,\mathrm{snu\,snv}}\right)^2}}{\partial U}$$

$$= \frac{1}{T'}\,\frac{\mathrm{dnu\,dnv}}{1+\varkappa_1\,\mathrm{snu\,snv}}\left[\frac{1}{\lambda_1}\,\frac{\varkappa_1\,\mathrm{snu}+\lambda_1^2\,\mathrm{snv}}{1+\varkappa_1\,\mathrm{snu\,snv}}\,\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right.$$

$$\left. -\,\frac{\lambda_1'\varkappa_1}{\lambda_1\varkappa_1'}\,\frac{\mathrm{cnu\,dnv}}{1+\varkappa_1\,\mathrm{snu\,snv}}\,\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]$$

$$\frac{\partial \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\lambda_1^2-\varkappa_1^2}}{\lambda_1\varkappa_1'}\,\frac{\mathrm{dnu\,dnv}}{1+\varkappa_1\,\mathrm{snu\,snv}}\right)^2}}{\partial V}$$

$$= \frac{1}{T'}\,\frac{\mathrm{dnu\,dnv}}{1+\varkappa_1\,\mathrm{snu\,snv}}\left[\frac{1}{\lambda_1}\,\frac{\varkappa_1\,\mathrm{snu}+\lambda_1^2\,\mathrm{snv}}{1+\varkappa_1\,\mathrm{snu\,snv}}\,\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right.$$

$$\left. +\,\frac{\lambda_1'\varkappa_1}{\lambda_1\varkappa_1'}\,\frac{\mathrm{cnu\,dnv}}{1+\varkappa_1\,\mathrm{snu\,snv}}\,\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right].$$

Mit diesem Material läßt sich wie vorher das $\frac{\partial x}{\partial U}$ und $\frac{\partial x}{\partial V}$ für die Voßschen Flächen anschreiben. Allein man ist nicht in der Lage $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ anzugeben, da es nicht möglich ist, die im Eingange dieses Paragraphen angeschriebene Laplacesche Differentialgleichung zu integrieren. Deshalb mögen im folgenden einige Spezialfälle betrachtet werden.

§ 5.

Spezielle Fälle.

I.

Der Winkel, unter welchem die Ebene einer ebenen Krümmungslinie einer Enneperschen pseudosphärischen Fläche diese Fläche schneidet, soll für alle ebenen Krümmungslinien der gleiche sein.

Wegen $\sigma = \text{const.}$ gilt in diesem Falle nach Gleichung (13), § 1:

$$A = A_1 = 0.$$

Aus der Gleichung (13), § 1 folgt: $\sin\sigma = \frac{1}{\sqrt{C}}$, während Gleichung (14), § 1 $v' = \frac{R}{\sqrt{C}}\,v_1$ ergibt.

Schließlich erhält man aus (37) bzw. (8), § 1: $u_1 = \sqrt{C-1}\,\varphi$ bzw. $u' = R\varphi$.

Nach (35) und (36) des genannten Paragraphen hat dann ein Punkt der hier in Betracht kommenden Flächen die Koordinaten:

$$x = \varrho\cos\varphi,\quad y = \varrho\sin\varphi,\quad \text{wobei}\quad \varrho = R\sin\sigma\,\frac{2}{e^{u_1+v_1}+e^{-(u_1+v_1)}};$$

$$z = v' - R\sin\sigma\,\frac{e^{u_1+v_1}-e^{-(u_1+v_1)}}{e^{u_1+v_1}+e^{-(u_1+v_1)}}.$$

Unter Verwendung der Hyperbelfunktionen kann man auch schreiben:

$$x = \frac{R\sin\sigma}{\operatorname{ch}(u_1+v_1)}\cos\varphi,\quad y = \frac{R\sin\sigma}{\operatorname{ch}(u_1+v_1)}\sin\varphi,\quad z = v' - R\sin\sigma\,\operatorname{th}(u_1+v_1)$$

oder

$$x = \frac{R\sin\sigma}{\operatorname{ch}\nu}\cos\varphi,\quad y = \frac{R\sin\sigma}{\operatorname{ch}\nu}\sin\varphi,\quad z = R\sin\sigma\,[\nu - \operatorname{th}\nu] - \varphi R\cos\sigma,$$

wo $\nu = \dfrac{1}{R\sin\sigma}(u'\cos\sigma + v')$ und $\varphi = \dfrac{u'}{R}$ ist.

Es sind dies Minding-Dinische Schraubenflächen[1]) mit der Tractrix als Meridiankurve.

Geht man nun zu den Haupttangentenkurven über, was auf Grund der vorausgehenden Beziehungen unter Benützung von (4), § 3 durch die Gleichungen:

$$v_1 = \frac{1}{\sin\sigma}(V+U),\quad u_1 = \operatorname{ctg}\sigma\,(V-U)$$

bewerkstelligt wird, so gilt:

$$E = G = R^2;\quad F = R^2\left[1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)V + \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)U\right)}\right].$$

Mithin ist $\cos\omega = 1 - \dfrac{2}{\operatorname{ch}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)V + \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)U\right)}$, woraus sich

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)V + \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)U\right)}$$

[1]) Vergl. Bianchi, pag. 476 (Vertauschte Parameter!).

sowie $$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \operatorname{th}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)V + \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)U\right)$$

ergibt. Folglich hat man:

$$\frac{\partial\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\partial U} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \frac{\partial\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\partial V} = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Die beiden im § 4 notierten Laplaceschen Differentialgleichungen, durch welche der Übergang zu den in den Fällen $A > 0$ und $A < 0$ sich ergebenden Voßschen Flächen vermittelt wird, werden dann zu der folgenden Gleichung:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial U \partial V}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\frac{\partial M}{\partial U} - \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\frac{\partial M}{\partial V} = 0.$$

Dieser Diff.-Gleichung genügt:

$$\frac{\partial M}{\partial U} = \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\left(C_1 \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2\right), \quad \frac{\partial M}{\partial V} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\left(C_1 \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2\right),$$

wobei C_1 und C_2 beliebige Konstante bilden.

Im folgenden sind auch die Richtungscosinus der Flächennormale notwendig. Dieselben lassen sich aus den im vorhergehenden erhaltenen Koordinaten eines Punktes der genannten Schraubenflächen bestimmen. Sie sind gegeben durch die Relationen;

$$X = \cos\sigma\sin\varphi - \sin\sigma\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\varphi$$

$$Y = -\cos\sigma\cos\varphi - \sin\sigma\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\varphi$$

$$Z = -\sin\sigma\sin\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Unter Anwendung von (9) sowie (13), § 2 ergeben sich für die x-Koordinate der zu diesem Spezialfall gehörenden Voßschen Flächen folgende partielle Differentialquotienten:

$$\frac{\partial x}{\partial U} = \begin{cases} C_1 \sin\sigma\left[\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sin\varphi + \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\varphi\right] \\ + C_2 \sin\sigma\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sin\varphi + \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\varphi\right] \end{cases}$$

$$\frac{\partial x}{\partial V} = \begin{cases} C_1 \sin\sigma \left[-\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \sin\varphi + \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\varphi \right] \\ + C_2 \sin\sigma \left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right) \dfrac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \sin\varphi - \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\varphi \right]. \end{cases}$$

Schreibt man $\frac{\partial x}{\partial U} = \frac{\partial x_1}{\partial U} + \frac{\partial x_2}{\partial U}$ sowie $\frac{\partial x}{\partial V} = \frac{\partial x_1}{\partial V} + \frac{\partial x_2}{\partial V}$, so ist dann

$$x = x_1 + x_2.$$

Da die in $\frac{\partial x}{\partial U}$ und $\frac{\partial x}{\partial V}$ auftretenden trigonometrischen Funktionen von $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ Funktionen von $\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)V + \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)U\right)$ sind, so muß gelten:

$$\frac{x_1}{C_1 \sin\sigma} = F_1\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)V + \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)U\right)\sin\varphi + F_2\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)V + \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)U\right)\cos\varphi.$$

Eine analoge Beziehung ist für x_2 anzuschreiben.

Durch Vergleichung der aus der vorhergehenden Gleichung zu bildenden Differentialquotienten $\frac{\partial x_1}{\partial U}$ und $\frac{\partial x_1}{\partial V}$ mit den obigen gleichnamigen partiellen Differentialquotienten findet man unter Benützung von $\varphi = V - U$ den ersten Teil der x-Koordinate:

$$x_1 = C_1 \sin\sigma \left[\frac{\sin\sigma}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cos\varphi - \cos\sigma \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\varphi \right].$$

Bei analogem Verfahren für den zweiten Teil der x-Koordinate ergibt sich:

$$x_2 = -C_2 \sin\sigma \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\varphi.$$

Mithin hat man:

$$x = \sin\sigma \left[C_1 \frac{\sin\sigma}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cos\varphi - \left(C_1 \cos\sigma \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\sin\varphi \right].$$

Der Wert der y-Koordinate wird gewonnen aus:

$$\frac{\partial y}{\partial U} = \begin{cases} C_1 \sin\sigma \left[- \dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cos\varphi + \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sin\varphi \right] \\ + C_2 \sin\sigma \left[- \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right) \dfrac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cos\varphi + \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sin\varphi \right] \end{cases}$$

$$\frac{\partial y}{\partial V} = \begin{cases} C_1 \sin\sigma \left[\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cos\varphi + \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sin\varphi \right] \\ - C_2 \sin\sigma \left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right) \dfrac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cos\varphi + \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sin\varphi \right]. \end{cases}$$

Er ist bestimmt durch die Gleichung:

$$y = \sin\sigma \left[C_1 \frac{\sin\sigma}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \sin\varphi + \left(C_1 \cos\sigma \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \cos\varphi \right].$$

Zur Berechnung der z-Koordinate ist notwendig:

$$\frac{\partial z}{\partial U} = C_1 \left[- \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \sin\sigma \right] + C_2 \left[- \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \sin\sigma \operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial V} = C_1 \left[- \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \sin\sigma \right] + C_2 \left[\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} - \sin\sigma \operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \right].$$

Daraus findet man:

$$z = C_1 \int \frac{d\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)} - C_2 \cos\sigma \int \frac{d\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$
$$+ C_1 \sin\sigma\,(V + U) + C_2\,(V - U) \sin\sigma.$$

Die zu dem Spezialfall $A = A_1 = 0$ gehörenden Scharen von o ß schen Flächen sind mithin durch die Gleichungen:

$$x = \sin\sigma \left[C_1 \frac{\sin\sigma}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cos\varphi - \left(C_1 \cos\sigma \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \sin\varphi \right]$$

$$y = \sin\sigma \left[C_1 \frac{\sin\sigma}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \sin\varphi + \left(C_1 \cos\sigma \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \cos\varphi \right]$$

$$z = C_1 \left[\int \frac{d\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)} + (V + U) \sin\sigma \right]$$

$$- C_2 \left[\cos\sigma \int \frac{d\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} - (V - U) \sin\sigma \right]$$

bestimmt. Im folgenden sollen vorstehende Koordinatenwerte in anderer Form, aus welcher die Art der Flächen zu erkennen ist, dargestellt werden.

Zunächst setze man

$$\frac{C_1 \sin^2\sigma}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = r \cos\psi \text{ sowie } \sin\sigma \left(C_1 \cos\sigma \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) = r \sin\psi,$$

woraus

$$= \frac{2 \sin\sigma}{\sin\omega} \sqrt{C_1^2 \sin^2\sigma \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \left(C_1 \cos\sigma \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \right)^2} \quad \text{und}$$

$$\psi = C_1 \sin\sigma \int \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \left[(C_2 - C_1 \cos\sigma) \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2 \right]}{C_1^2 \sin^2\sigma \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \left(C_1 \cos\sigma \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \right)^2} d\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

resultiert; ferner bezeichne man $\varphi + \psi$ mit χ.

Zur Umgestaltung der z-Koordinate lässt sich unter Verwendung der Werte von $\frac{\partial\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\partial U}$ und $\frac{\partial\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\partial V}$, wie sie oben berechnet wurden,

und des Wertes von $\varphi = V - U$ angeben, daß $(V + U) \sin\sigma = -\sin^2\sigma \int \frac{d\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} - \sin\sigma\cos\sigma \cdot \varphi$ ist.

Die Koordinaten eines Punktes der oben erhaltenen Voßschen Flächen stellen sich dann in folgender Form dar:

$$x = r\cos\chi, \quad y = r\sin\chi$$

$$z = \int \frac{\left(C_1^2\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\left(C_1\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2\cos\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\frac{\omega}{2}\left)\left[C_1^2\sin^2\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \left(C_1\cos\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2\right]} d\left(\frac{\omega}{2}\right.$$

$$+ \sin\sigma\,(C_2 - C_1\cos\sigma)\,\chi.$$

Da r eine Funktion von $\frac{\omega}{2}$ ist, kann man auch schreiben:

$$z = f(r) + \sin\sigma\,(C_2 - C_1\cos\sigma)\,\chi.$$

Man hat es also hier mit Schraubenflächen zu tun; der Parameter der Schraubung ist durch den Wert $\sin\sigma\ (C_2 - C_1\cos\sigma)$ gegeben. Die dabei auftretenden Größen r, χ, $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$ haben die im vorhergehenden notierten Werte. Der Winkel σ, unter welchem die Ebene einer ebenen Krümmungslinie die Fläche schneidet, liegt zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Der Fall $\sigma = \frac{\pi}{2}$ wird später für sich behandelt. Winkel ω soll das Intervall von 0 bis 2π durchlaufen. Die auftretenden Quadratwurzeln sollen stets mit positivem Vorzeichen genommen werden.

Diskussion der erhaltenen Voßschen Flächen.

1. Fall: $C_1 > 0$, $C_2 > 0$.

Die z-Achse ist die Gerade, um welche die Schraubung ausgeführt wird, r ist der Abstand eines Punktes des Meridianprofils von dieser Achse; die Variablen r und z sind Funktionen des Parameters $\frac{\omega}{2}$.

Für die Ermittelung der Gestalt des Meridianprofils ist folgendes Material maßgebend:

$$r = \frac{2\sin\sigma}{\sin\omega}\sqrt{C_1^2\sin^2\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+\left(C_1\cos\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+C_2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2},$$

$$\frac{dr}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)} = -\frac{\sin\sigma\left(C_1^2\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)-C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{C_1^2\sin^2\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+\left(C_1\cos\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+C_2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2}}$$

$$z = C_1\left[-\frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}+\frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right)-\sin^2\sigma\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right)\right]$$

$$-C_2\cos\sigma\left[\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right)+\frac{1}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right]$$

$$-\sin\sigma(C_2-C_1\cos\sigma)\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(C_1\cos\sigma\operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right)+C_2\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}{C_1\sin\sigma}\right],$$

$$\frac{dz}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{\left(C_1^2\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)-C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\left(C_1\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+C_2\cos\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[C_1^2\sin^2\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+\left(C_1\cos\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+C_2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2\right]}$$

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{\sin\sigma\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{C_1^2\sin^2\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+\left(C_1\cos\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+C_2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2}}{C_1\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+C_2\cos\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$\frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{\sin\sigma\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{C_1^2\sin^2\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+\left(C_1\cos\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+C_2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2}}{\left(C_1^2\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)-C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\left(C_1\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+C_2\cos\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^3}$$

$$\cdot\left[\begin{array}{l} C_1^3\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(\sin^2\sigma+\cos^2\sigma\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) \\ \qquad +C_1^2C_2\cos\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(\sin^2\sigma\cos\omega+(2+\cos^2\sigma)\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) \\ +C_1C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(3\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+2\sin^2\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)+C_2^3\cos\sigma\sin^6\left(\frac{\omega}{2}\right. \end{array}\right.$$

Für $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$ gilt:

$$0 \leqq \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqq 1.$$

Man erkennt dann Folgendes:

r nimmt ab mit wachsendem ω von $r = \infty \left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1\right)$ bis zu einem Minimum, welches für $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ eintritt; dann aber wächst r beständig mit kontinuierlich wachsendem ω von dem genannten Minimum $r_{min.} = 2 \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) \sin\sigma \sqrt{C_1} \sqrt{C_1 \sin^2\left(\frac{\sigma}{2}\right) + C_2}$ bis $r = \infty \left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0\right)$.

Die z-Koordinate nimmt zu mit wachsendem ω von $z = -\infty \left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1\right)$ bis zu dem Punkte, in welchem r ein Minimum wird $\left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)$, nimmt aber dann von da aus beständig ab bis $z = -\infty \left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0\right)$; z ist dabei beständig negativ. In dem Punkte, in welchem r sein Minimum erreicht, nimmt z sein Maximum an.

Der Differentialquotient $\frac{dr}{dz}$ bleibt stets negativ. Der Ausdruck, welcher seinen Wert bestimmt, sagt aus, daß r mit abnehmendem (im Negativen wachsendem) z wächst. Für $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$ ist $\frac{dr}{dz} = 0$ ($r = \infty$, die unendlich ferne Gerade ist Tangente der Kurve); dieser Wert kann sonst nicht mehr eintreten. Der Ausdruck unter der Quadratwurzel in $\frac{dr}{dz}$ kann nämlich nicht verschwinden, da sonst $r = 0$ wäre, was nach dem Vorausgehenden ja ausgeschlossen ist. Nebenbei sei bemerkt, daß auch der Nenner von $\frac{dr}{dz}$ nicht den Wert 0 annehmen kann; sein Verschwinden hätte für $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$ einen imaginären Wert zur Folge. Für $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ ist $\frac{dr}{dz} = -2 \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) \sqrt{\frac{C_1}{C_2 (C_1 + C_2)}} \sqrt{C_1 \sin^2\left(\frac{\sigma}{2}\right) + C_2}$ und für $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$ ($r = \infty$, $z = -\infty$) erreicht es den Grenzwert $-\operatorname{tg}\sigma$;

die Kurventangente strebt in diesem Punkte einer Grenzlage zu, sie wird mithin zur Asymptote. Die Gleichung derselben lautet: $r + \operatorname{tg}\sigma\, z + \frac{\sin^2\sigma}{\cos\sigma}(C_2 - C_1\cos\sigma)\frac{\pi}{2} = 0$, wo r und z laufende Koordinaten sind. Sie wird erhalten aus der Gleichung $r = mz + h$,

wobei $$m = \lim_{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)=0}\left(\frac{dr}{dz}\right) = -\operatorname{tg}\sigma$$

und $$h = \lim_{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)=0}(r - mz) = -\frac{\sin^2\sigma}{\cos\sigma}(C_2 - C_1\cos\sigma)\frac{\pi}{2}$$ ist.

Der Wert von $\frac{dr}{dz}$ nimmt, wie aus dem Vorhergehenden sich ergibt, kontinuierlich ab von

$$0\left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=1\right) \text{ bis } -\operatorname{tg}\sigma\left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=0\right).$$

Der Differentialquotient $\frac{d^2r}{dz^2}$ ist in dem Bereiche von $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=1$ bis $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{C_2}{C_1+C_2}$ stets negativ, wird für den zuletzt genannten Wert von $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$ zu $-\infty$, ist aber dann in dem Bereiche von $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{C_2}{C_1+C_2}$ bis $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=0$ fortwährend positiv.

Die Meridiankurve wendet demnach auf dem ersteren Zweige ihre konkave Seite und auf dem letzteren ihre konvexe Seite der z-Achse zu. In dem Punkte, welcher zu $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{C_2}{C_1+C_2}$ gehört, ist eine Spitze vorhanden. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß r negativ und z positiv wird, wenn man $\frac{\omega}{2}$ durch $\pi - \frac{\omega}{2}$ ersetzt.

Das Meridianprofil hat demnach, schematisch dargestellt, folgende Gestalt (Fig. 1).

2. Fall: $C_1 < 0, \quad C_2 < 0.$

Man erhält kein neues Meridianprofil.

3. Fall: $C_1 < 0, \quad C_2 < 0.$

Man setzt $C_1 = -C_1'$, wobei C_1' positiv ist, und unterdrückt der Einfachheit halber wieder den Akzent. Als Diskussionsmaterial ist dann zu notieren:

$$r = \frac{2\sin\sigma}{\sin\omega}\sqrt{C_1^2\sin^2\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \left(C_2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_1\cos\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2},$$

$$\frac{dr}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)} = -\frac{\sin\sigma\left(C_1^2\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{C_1^2\sin^2\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \left(C_2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_1\cos\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2}};$$

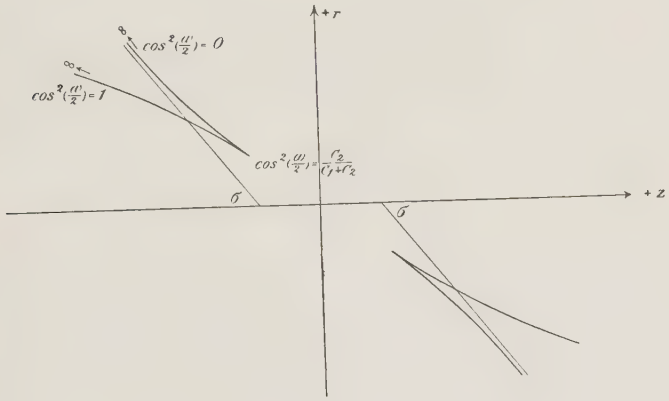

Fig. 1.

$$z = -\left\{\begin{array}{l} C_1\left[-\dfrac{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \dfrac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right) - \sin^2\sigma\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right)\right] \\ \qquad + C_2\cos\sigma\left[\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right) + \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right], \\ + \sin\sigma\left(C_1\cos\sigma + C_2\right)\operatorname{arc\,tg}\left[\dfrac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(C_1\cos\sigma\operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}{C_1\sin\sigma}\right] \end{array}\right\},$$

$$\frac{dz}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)} = -\frac{\left(C_1^2\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\left(C_1\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2\cos\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[C_1^2\sin^2\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \left(C_2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_1\cos\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2\right]},$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{\sin\sigma\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{C_1^2\sin^2\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \left(C_2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_1\cos\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2}}{C_1\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2\cos\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)};$$

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{\sin\sigma \sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{C_1^2\sin^2\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+\left(C_2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)-C_1\cos\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2}}{\left(C_1^2\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)-C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\left(C_1\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)-C_2\cos\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^3}$$

$$\cdot\left[\begin{array}{l} -C_1^3\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(\sin^2\sigma+\cos^2\sigma\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right. \\ \qquad \left.+C_1^2C_2\cos\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(\sin^2\sigma\cos\omega+(2+\cos^2\sigma)\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\right. \\ -C_1C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(3\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+2\sin^2\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)+C_2^3\cos\sigma\sin^6\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{array}\right]$$

Giltigkeitsbereich für $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$:

$$0 \leqq \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqq 1\,.$$

In diesem Falle sind, wie das Folgende zeigt, für das Meridianprofil — ω soll sämtliche Werte von $\omega = 0$ bis $\omega = \pi$ durchlaufen und zwar stets in der aufgeführten Reihenfolge — drei Bereiche zu unterscheiden. Der erste Bereich erstreckt sich von $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$ bis $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$, der zweite läuft von $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ bis $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2\cos\sigma}{C_1 + C_2\cos\sigma}$ und der dritte hat die Grenzen $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2\cos\sigma}{C_1 + C_2\cos\sigma}$ und $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$.

Aus dem für $\frac{dr}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ notierten Werte folgt, daß r in dem ersten Bereich mit wachsendem ω abnimmt und zwar von $r = \infty$ bis zu seinem Minimum $r_{min.} = 2\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)\sin\sigma\sqrt{C_1}\cdot\sqrt{C_1\cos^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)+C_2}$; von hier ab wächst r beständig mit wachsendem ω im zweiten und dritten Bereiche bis $r = \infty$. Der für den Differentialquotienten $\frac{dz}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ auftretende Ausdruck, ein Bruch, enthält im Zähler zwei Differenzen, nämlich $C_1^2\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)$ und $C_1\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2\cos\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$, als Fak-

toren. Durch dieselben sind die drei Bereiche auf dem Meridianprofil bestimmt, wenn man bedenkt, daß $\frac{C_2}{C_1 + C_2} > \frac{C_2 \cos\sigma}{C_1 + C_2 \cos\sigma}$ ist. Aus dem Werte des Differentialquotienten $\frac{dz}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ ist zu entnehmen, daß z in dem ersten Bereiche abnimmt (von $z = \infty$ ab), im zweiten zunimmt und im dritten wieder abnimmt (bis $z = -\infty$). $\frac{dr}{dz}$ ist zuerst positiv; sein Wert wächst von $\frac{dr}{dz} = 0 \left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1\right)$ bis $\frac{dr}{dz} = 2\cos\left(\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{\frac{C_1}{C_2(C_1 + C_2)}}\sqrt{C_1\cos^2\left(\frac{\sigma}{2}\right) + C_2}$, wächst weiter, immer noch positiv bleibend, bis er für $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2\cos\sigma}{C_1 + C_2\cos\sigma}$ unendlich groß wird, woraus folgt, daß an dieser Stelle die Meridiankurve eine zur r-Achse parallele Tangente hat. Nun wird der Wert von $\frac{dr}{dz}$ negativ (beim Eintritt in den 3. Bereich), bleibt es beständig und nimmt kontinuierlich ab, bis er für $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$ den Grenzwert $-\operatorname{tg}\sigma$ annimmt. In diesem Punkte ($r = \infty$, $z = -\infty$) hat das Meridianprofil eine Asymptote, bestimmt durch die Gleichung: $r + \operatorname{tg}\sigma z - \frac{\sin^2\sigma}{\cos\sigma}(C_1\cos\sigma + C_2)\frac{\pi}{2} = 0$. Dieselbe ist entstanden aus der Gleichung: $r = mz + h$, wobei $m = \lim_{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)=0}\left(\frac{dr}{dz}\right) = -\operatorname{tg}\sigma$ und $h = \lim_{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)=0}(r - mz) = \frac{\sin^2\sigma}{\cos\sigma}(C_1\cos\sigma + C_2)\frac{\pi}{2}$ ist. Der Ausdruck, welcher den Wert des Differentialquotienten $\frac{d^2r}{dz^2}$ darstellt, hat einen Faktor (Inhalt einer eckigen Klammer), welcher für $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$ den Wert $-C_1^3$, für $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ den Wert

$$4 - \frac{C_1^3 C_2}{(C_1 + C_2)^3}\left[\cos\sigma\left(C_2^2 - \frac{1}{4}\sin^2\sigma C_1^2\right) - \left(C_2^2 + \sin^2\sigma C_1(C_1 + C_2)\right)\right],$$

der sicher negativ ist, annimmt. Der genannte Faktor nimmt für $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2 \cos\sigma}{C_1 + C_2 \cos\sigma}$ den Wert $\frac{2\,C_1{}^3\,C_2}{(C_1 + C_2\cos\sigma)^3}\Big[C_2{}^2\cos^3\sigma - \big(C_1{}^2\sin^2\sigma\cos\sigma + C_1\,C_2\sin^2\sigma(\cos^2\sigma+1)\big) + C_2{}^2\cos\sigma\Big]$ (ebenfalls negativ, weil $C_2{}^2\cos^3\sigma < C_2{}^2\cos\sigma$) und für $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$ die Größe $C_2{}^3\cos\sigma - \sin^2\sigma\,C_1\,C_2(C_1\cos\sigma + 2\,C_2)$ an. Der Differentialquotient $\frac{d^2r}{dz^2}$ enthält auch die zwei oben genannten Differenzen als Faktoren (im Nenner). Er verschwindet im Endlichen nicht. Es läßt sich nun leicht konstatieren, daß er im ersten Bereich negativ, im zweiten positiv und im dritten wieder negativ ist. Das Meridianprofil wendet demnach der z-Achse bzw. zuerst die konkave, hierauf die konvexe und zuletzt wieder die konkave Seite zu. In dem Punkte, welcher dem Werte $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ entspricht, liegt eine Spitze vor.

Ersetzt man $\frac{\omega}{2}$ durch $\pi - \frac{\omega}{2}$, so ändern r und z ihr Vorzeichen. Aus dem Vorhergehenden erhellt folgende Gestalt des Meridianprofils:

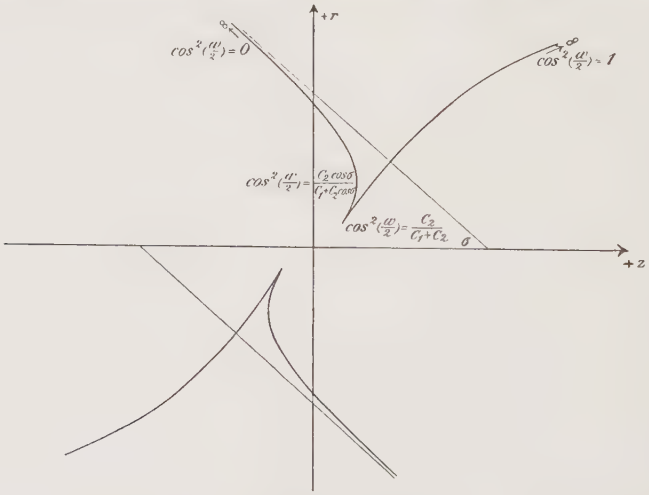

Fig 2.

Hiebei wurden verwendet die Werte: $C_1 = 4$, $C_2 = 1$, $\sigma = 60^0$.

4. Fall: $C_1 > 0$, $C_2 < 0$.

Man erhält nichts Neues.

5. Fall: $C_1 \neq 0, \quad C_2 = 0; \quad C_1 > 0.$

Die hier auftretenden Voßschen Flächen sind durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$x = r\cos\chi, \quad y = r\sin\chi$$

$$z = C_1\left[\int \frac{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(1-\cos^2\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}\,d\left(\frac{\omega}{2}\right) - \sin\sigma\cos\sigma\cdot\chi\right].$$

Dabei ist $$r = \frac{C_1\sin\sigma}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sqrt{1-\cos^2\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

und $$\chi = V - U - \sin\sigma\cos\sigma\int \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1-\cos^2\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,d\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Man hat es demnach auch hier mit Schraubenflächen zu tun.

Zur Bestimmung der Gestalt des Meridianprofils muß man die folgenden Beziehungen verwenden:

$$r = \frac{C_1\sin\sigma}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sqrt{1-\cos^2\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$\frac{dr}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)} = -\frac{C_1\sin\sigma\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{1-\cos^2\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}};$$

$$z = C_1\left[-\frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right) - \sin^2\sigma\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right) + \sin\sigma\cos\sigma\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{ctg}\sigma\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\right],$$

$$\frac{dz}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)} = C_1\,\frac{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(1-\cos^2\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)};$$

$$\frac{dr}{dz} = -\sin\sigma \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{1-\cos^2\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$\frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{\sin\sigma}{C_1}\cdot\frac{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)}\left(\sin^2\sigma+\cos^2\sigma\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\sqrt{1-\cos^2\sigma\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Giltigkeitsbereich für $\frac{\omega}{2}$:

$$0 \leqq \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqq 1.$$

Aus diesem Material läßt sich Folgendes konstatieren:

r wächst kontinuierlich von seinem kleinsten Werte $r_{min.} = C_1 \sin^2\sigma$, welcher für $\cos\frac{\omega}{2} = 0$ eintritt, bis zu seinem größten Werte $r_{max.} = \infty$, der sich für $\cos^2\frac{\omega}{2} = 1$ einstellt. Aus dem Werte von $\frac{dr}{dz}$ ist zu ersehen, daß r zunimmt mit abnehmendem z; z nimmt ab mit abnehmendem $\frac{\omega}{2}$. Der Differentialquotient $\frac{dr}{dz}$ ist beständig negativ, solange sich $\frac{\omega}{2}$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und 0 bewegt; er nimmt den Wert 0 erst an für $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$, in welchem Falle $r = \infty$ ist. Zu beachten ist, daß $\frac{dr}{dz} = -\infty$ ist für $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$, wo r seinen kleinsten Wert hat. Mithin liegt in diesem Punkte, in welchem auch $z = 0$ ist, eine Spitze vor, wenn man noch den anderen Kurvenast, der durch die Ersetzung von $\frac{\omega}{2}$ durch $\pi - \frac{\omega}{2}$ entsteht, hinzunimmt. Die Schraubenfläche, die zu einem bestimmten Werte von C_1 gehört, besitzt demnach eine Rückkehrkurve. Das Gleiche gilt auch für die früheren Fälle. $\frac{d^2r}{dz^2}$ bleibt stets negativ uud verschwindet im Endlichen nicht. Die Meridiankurve wendet daher der z-Achse die konkave Seite zu.

Die Gestalt des Meridianprofils ist in der nachstehenden Figur dargestellt.

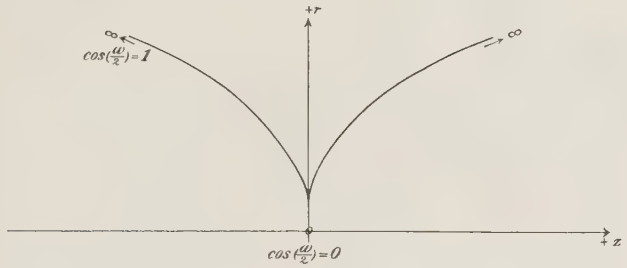

Fig. 3.

6. Fall: $C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad C_2 > 0.$

Die Koordinaten eines Punktes der zugehörigen Voßschen Flächen sind bestimmt durch:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = -C_2\cos\sigma\int\frac{d\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} + C_2\sin\sigma\,\varphi.$$

Es liegen also wieder Schraubenflächen vor.

Dabei ist $r = C_2\sin\sigma\,\mathrm{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ und $\varphi = V - U = \chi.$

Fügt man bei

$$\psi = C_1\sin\sigma\int\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[(C_2 - C_1\cos\sigma)\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2\right]}{C_1^2\sin^2\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \left(C_1\cos\sigma\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2}\,d\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

noch die Integrationskonstante $\frac{\pi}{2}$ bei, dann erhält man für diesen Fall $(C_1 = 0)$:

$$x = -C_2\sin\sigma\,\mathrm{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\varphi, \quad y = C_2\sin\sigma\,\mathrm{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\varphi,$$

also für die x- und y-Koordinate die gleichen Werte, wie sie sich aus den früher berechneten allgemeinen Werten:

$$x = \sin\sigma\left[C_1\frac{\sin\sigma}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\cos\varphi - \left(C_1\cos\sigma\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\sin\varphi\right]$$

$$y = \sin\sigma \left[C_1 \frac{\sin\sigma}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \sin\varphi + \left(C_1 \cos\sigma \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \cos\varphi \right]$$

für $C_1 = 0$ ergeben.

Für die Gestalt der Meridiankurve ist maßgebend:

$$r = C_2 \sin\sigma \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad z = -C_2 \cos\sigma \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{4}\right) \right) \right];$$

$$\frac{dr}{dz} = -\operatorname{tg}\sigma \sin\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{\operatorname{tg}\sigma \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos^3\left(\frac{\omega}{2}\right)}{C_2 \cos\sigma}.$$

Giltigkeitsbereich für $\left(\frac{\omega}{2}\right)$: $0 \leqq \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqq 1$.

r wächst kontinuierlich mit wachsendem $\frac{\omega}{2}$ von 0 bis ∞; es nimmt zu mit abnehmendem z. $\frac{dr}{dz}$ verschwindet für $\frac{\omega}{2} = 0$, in welchem Grenzfall $r = 0$ und $z = +\infty$ ist. Die positive Richtung der z-Achse ist demnach Asymptote an diesen Teil der Meridiankurve, für welchen ω sich zwischen den Grenzen 0 und π bewegt. $\frac{\omega}{2} = 90^0$ liefert $r = \infty$ bzw. $z = -\infty$. $\frac{dr}{dz}$ ist beständig negativ, $\frac{d^2 r}{dz^2}$ bleibt stets positiv; die Kurve ist deshalb gegen die z-Achse konvex. Führt man $\frac{\omega}{2}$ in $\pi - \frac{\omega}{2}$ über, erhält man einen unterhalb der z-Achse gelegenen zweiten Zweig des Meridianprofils. Dieses hat neben der z-Achse als erster Asymptote noch eine zweite von der Gleichung: $\frac{r}{z} = -\operatorname{tg}\sigma$.

Dieselbe entsteht aus der allgemeinen Gleichung $r = mz + h$, wobei hier $m = -\operatorname{tg}\sigma = \lim_{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)=0} \left(\frac{dr}{dz}\right)$ und $h = \lim_{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)=0} (r - mz) = 0$ ist.

Eine genaue graphische Darstellung bestätigt das Gesagte. Am besten wählt man $C_2 \sin\sigma = 1$ und $C_2 = \sqrt{2}$. (Fig. 4.)

7. Fall: $C_2 = C_1 \cos\sigma$.

Hier treten nun Voßsche Rotationsflächen[1]) auf, für welche gilt:

$$x = r\cos\chi, \quad y = r\sin\chi, \quad z = C_1 \int \frac{\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - \cos^2\sigma \sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \, d\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

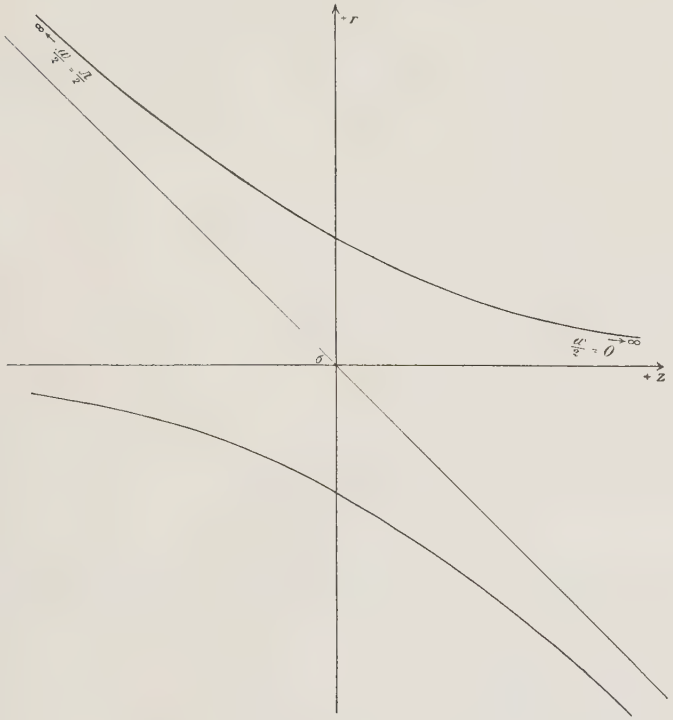

Fig. 4.

wo $$r = \frac{2\,C_1 \sin^2\sigma}{\sin\omega} \sqrt{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \operatorname{ctg}^2\sigma}$$

und $$\chi = V - U + \operatorname{ctg}\sigma \int \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \operatorname{ctg}^2\sigma} \, d\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{ist.}$$

---

[1]) Der Fall $\sigma = \frac{\pi}{2}$ wird für sich auf pag. 53 behandelt.

Gestalt des Meridianprofils.

$$r = \frac{C_1 \sin^2\sigma}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} \sqrt{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \operatorname{ctg}^2\sigma},$$

$$\frac{dr}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)} = -\frac{C_1\left(\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - \cos^2\sigma\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \operatorname{ctg}^2\sigma}};$$

$$z = -C_1\left[\frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{4}\right) + \frac{\cos^2\sigma}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right],$$

$$\frac{dz}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{C_1\left(\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - \cos^2\sigma\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)};$$

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \operatorname{ctg}^2\sigma}},$$

$$\frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^3\left(\frac{\omega}{2}\right)}{C_1\sin^2\sigma\left(\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - \cos^2\sigma\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \operatorname{ctg}^2\sigma\right)\sqrt{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \operatorname{ctg}^2}}$$

Giltigkeitsbereich für $\left(\frac{\omega}{2}\right) : 0 \leqq \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqq 1.$

r nimmt zunächst ab mit wachsendem $\frac{\omega}{2}$ und zwar von $r = \infty \left(\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1\right)$ bis zu einem Minimum $r_{min.} = 2C_1 \sin\sigma \cos^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)$, welches für $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\cos\sigma}{1+\cos\sigma}$ eintritt; dann aber wächst es beständig von diesem kleinsten Werte bis $r = \infty$. In dem ersten der zwei genannten Bereiche wächst z, im zweiten nimmt es ab. Die zwei Differentialquotienten $\frac{dr}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ und $\frac{dz}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ enthalten nämlich die Dif-

ferenz $\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - \cos^2\sigma \sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)$, welche zuerst positiv, dann aber negativ ist. $\frac{dr}{dz}$ bleibt beständig negativ; für $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$ ist sein Wert 0 und in dem Punkte, welcher zu $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$ gehört, nimmt er den Grenzwert $-\operatorname{tg}\sigma$ an. Auch $\frac{d^2r}{dz^2}$ hängt von der oben erwähnten Differenz ab. Sein Wert ist zuerst negativ (1. Bereich), dann jedoch positiv (2. Bereich); die Meridiankurve ist mithin gegen die z-Achse konkav (1. Bereich) bzw. konvex (2. Bereich) gekrümmt. Der Punkt, für welchen $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\cos\sigma}{1+\cos\sigma}$ ist, ist eine Spitze. An der Stelle $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$ besitzt das Meridianprofil eine Asymptote mit der Gleichung: $\frac{r}{z} = -\operatorname{tg}\sigma$. Bei der graphischen Darstellung desselben wurde $C_1 = 1$ und $\sigma = \frac{\pi}{4}$ gewählt; das Koordinatensystem in der folgenden Figur ist verschoben. Führt man $\frac{\omega}{2}$ über in $\pi - \frac{\omega}{2}$, so erhält man einen in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt symmetrischen Zweig der Meridiankurve (analog wie früher).

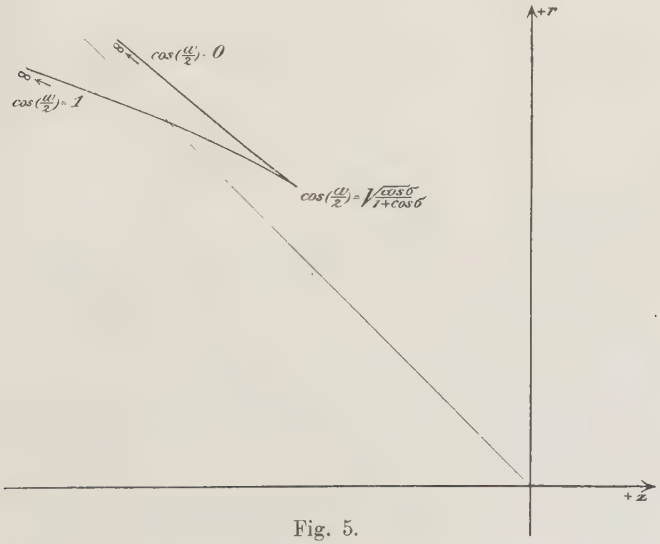

Fig. 5.

Wir haben es in dem vorliegenden Falle, wie schon oben bemerkt wurde, mit Voßschen Rotationsflächen zu tun. Die Ausdrücke für die z-Koordinate sowie für den Winkel χ können noch in einer anderen Form dargestellt werden; man kann nämlich schreiben:

$$z = 4\,C_1 \int \frac{\left(\cos^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)\cos\omega + \sin^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right)\left(\sin^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)\cos\omega + \cos^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\omega}\,\mathrm{d}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\chi = \frac{1}{\sin\sigma}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)V - \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)U + \frac{\operatorname{ctg}\sigma}{\sin\sigma}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \operatorname{ctg}^2\sigma\right)}\right].$$

Dazu sei noch zur Wiederholung notiert:

$$r = \frac{2\,C_1 \sin^2\sigma}{\sin\omega}\sqrt{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \operatorname{ctg}^2\sigma}\,;$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\partial U} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right), \qquad \frac{\partial\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\partial V} = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Es hat aber auch Tachauer in seiner im Paragraphen 1 zitierten Arbeit (pag. 47 derselben) die Gleichungen von Voßschen Rotationsflächen aufgestellt. Sie lauten:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$$z = f(r) = -\frac{1}{2\sqrt{a\,b}}\int \frac{(a\cos\omega + b)(b\cos\omega + a)}{\sin^2\omega\sqrt{C^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}\,\mathrm{d}\omega\,;$$

$$r = 2\sqrt{a\,b}\,\frac{T}{\sin\omega}, \quad \text{wo} \quad T = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \lambda^2} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{a - b}{2\sqrt{a\,b}} \quad \text{ist};$$

$$\varphi = \Lambda\left[\frac{a\,u - b\,v}{\sqrt{a\,b}} + \frac{\lambda\sqrt{\lambda^2 + 1}}{2}\int \frac{\mathrm{d}\omega}{T^2\sqrt{C^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}\right],$$

$$\Lambda = \sqrt{C^2 + \lambda^2}\,; \quad \mathrm{d}\omega = -2\sqrt{C^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,\frac{a\,\mathrm{d}u + b\,\mathrm{d}v}{\sqrt{a\,b}}.$$

C, a, b sind Konstante. Die Integrationskonstante C kann folgende Werte annehmen:

$$C^2 = \frac{1}{\varkappa^2}\,(0 \leqq \varkappa < 1); \quad C^2 = \varkappa^2\,(0 < \varkappa < 1); \quad C^2 = 1.$$

Winkel ω ist der Winkel, welchen die Parameterlinien u = const. und v = const. der Haupttangentenkurven der genannten Flächen miteinander bilden. Tachauer kommt auf einem anderen als auf dem hier eingeschlagenen Weg zu seinen Resultaten. Er bestimmt nämlich unabhängig von der Laplaceschen Differentialgleichung (8), § 2 die erwähnten Flächen und dann die zu denselben durch Parallelismus der Flächennormalen Assoziierten.

Setzt man nun einerseits in den oben vom Verfasser angegebenen Flächengleichungen $C = \frac{1}{\sin\sigma}$, andererseits in den von Tachauer aufgestellten Gleichungen, nachdem die Parameter u und v miteinander vertauscht sind, $C = 1$, $a = \cos^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)$ und $b = \sin^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)$, so stimmen die sich entsprechenden Gleichungen bis auf den Faktor 2, welcher bei der Bestimmung von $\frac{\partial M}{\partial U}$ und $\frac{\partial M}{\partial V}$ (vgl. den einschlägigen Teil dieses § 5) durch Beifügung des Faktors $\frac{1}{2}$ wieder aufgehoben werden kann, vollständig überein. Die bei Tachauer für die oben notierten anderen Werte von C sich ergebenden V-Rotationsflächen treten in dem von uns behandelten Problem nicht auf, da es sich hier von vorneherein ja nur um Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes handelt, auf welchen das eine System der Krümmungslinien eben ist.

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, daß der von Tachauer für den Parameter $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ aufgestellte Giltigkeitsbereich (pag. 48 seiner Arbeit): $\frac{a-b}{2a} \leqq \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqq 1$ nicht richtig bzw. nicht vollständig ist. Vielmehr gelten, entsprechend den für die Konstante C oben notierten Werten bzw. folgende Bereiche:

$$0 \leqq \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqq 1 \left(C^2 = \frac{1}{\varkappa^2}\right); \quad 0 \leqq \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqq \varkappa^2 (C^2 = \varkappa^2);$$

$$0 \leqq \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqq 1 (C^2 = 1).$$

Dies erhellt schon aus den Gleichungen: $r = 2\sqrt{a\,b}\,\frac{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \lambda^2}}{\sin\omega}$,

$$\frac{dr}{d\omega} = -\frac{(a\cos\omega + b)(b\cos\omega + a)}{2\sqrt{ab}\,T\sin^2\omega} \quad \text{und} \quad \frac{dr}{dz} = \frac{\sqrt{C^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{T}.$$ Differentialquotient $\frac{dr}{d\omega}$ kann noch auf eine andere Form gebracht werden, da man schreiben kann:

$$\frac{dr}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)} = -\frac{\sqrt{ab}\left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{a-b}{2a}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{a-b}{2a}\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \lambda^2}}, \quad \text{wobei } a > b.$$

Dann aber ist auch an der Diskussion der Meridianprofile der V-Rotationsflächen manches zu ändern. Für den Fall $C = 1$ ist die Sache im vorhergehenden richtig gestellt. Die zwei anderen Fälle kommen hier nicht in Betracht. Analoges hiezu finden wir bei der Behandlung des Falles $\sigma = \frac{\pi}{2}$.

Hier muß auch erwähnt werden, daß die von Tachauer auf S. 48 seiner Dissertation aufgestellte Behauptung: „Alle Flächen V_R (alle Voßschen Rotationsflächen) sind elliptisch gekrümmt“ falsch ist. Dies ist leicht nachzuweisen. Das Krümmungsmaß einer V-Fläche hat nämlich den Wert

$$K = \frac{1}{\sqrt{EG}}.$$

Nun ist

$$E = \frac{4a\,\mathcal{A}^2(a\cos\omega + b)^2}{b\sin^4\omega} \quad \text{und} \quad G = \frac{4b\,\mathcal{A}^2(b\cos\omega + a)^2}{a\sin^4\omega}$$

(Tachauer, pag. 47 u. 48).

Deshalb erhält man:

$$K = \frac{\sin^4\omega}{4\,\mathcal{A}^2(a\cos\omega + b)(b\cos\omega + a)}$$

oder

$$K = \frac{\sin^4\omega}{16\,\mathcal{A}^2 ab\left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{a-b}{2a}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{a-b}{2a}\right)}.$$

Im vorhergehenden wurden die für den Giltigkeitsbereich von ω notwendigen richtigen Grenzbedingungen notiert. Aus denselben kann man leicht erkennen, daß die in dem letzten Ausdrucke für das Krümmungsmaß K auftretende Differenz $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{a-b}{2a}$ nach-

einander einen negativen, verschwindenden und positiven Wert annehmen muß. Dementsprechend enthalten die Voßschen Rotationsflächen Bereiche mit hyperbolischer und elliptischer Krümmung; beide sind jeweilig durch eine Rückkehrkurve voneinander getrennt.

II.

Die den pseudosphärischen Rotationsflächen entsprechenden Voßschen Flächen.

Bevor wir an die eigentliche Behandlung dieses Problems gehen, soll die zum Übergang von den Parametern (v', u') der Krümmungslinien (Parallelkreise und Meridiane) zu den Parametern (V, U) der Haupttangentenkurven notwendige Differentialgleichung abgeleitet werden. Eine Rotationsfläche ist bekanntlich bestimmt durch die Gleichungen:

$$x = p(v')\cos u', \quad y = p(v')\sin u', \quad z = q(v').$$

v' bedeute die Bogenlänge des Meridians, die im Sinne der wachsenden Koordinate z gewählt sei. Dann gilt:

$$E = p^2, \qquad F = 0, \qquad G = p'^2 + q'^2 = 1$$
$$X = q'\cos u', \quad Y = q'\sin u', \quad Z = -p'$$
$$D = -pq', \qquad D' = 0, \qquad D'' = \frac{p''}{q'}.$$

Der oben erwähnte Übergang wird vermittelt durch die Beziehung:

$$D\,du^2 + 2D\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0.$$

Diese Gleichung reduziert sich auf die folgende:

$$du' = \pm\sqrt{\frac{p''}{pq'^2}}\,dv'.$$

Bei den pseudosphärischen Rotationsflächen[1]) hat man bekanntlich 3 Typen zu unterscheiden, die jetzt behandelt werden sollen.

α) Die Rotationsfläche der Traktrix.

Ein Punkt derselben hat die Koordinaten:

$$x = e^{\frac{v'}{R}}\cos u', \quad y = e^{\frac{v'}{R}}\sin u', \quad z = \int\sqrt{1 - \frac{1}{R^2}\,e^{\frac{2v'}{R}}}\,dv'.$$

Für den Übergang zu den Parametern (V, U) der Haupttangenten-

[1]) Vgl. Bianchi, pag. 190/1; vertauschte Parameter!

kurven erhält man aus der oben notierten Differentialgleichung folgende Beziehungen:

$$u' = \ln\left(\frac{e^{\frac{v'}{R}}}{R + \sqrt{R^2 - e^{\frac{2v'}{R}}}}\right) + 2V, \quad u' = -\ln\left(\frac{e^{\frac{v'}{R}}}{R + \sqrt{R^2 - e^{\frac{2v'}{R}}}}\right) - 2U.$$

V und U spielen dabei die Rolle von Integrationskonstanten. Hieraus folgt:

$$u' = V - U, \quad e^{\frac{v'}{R}} = \frac{R}{\cosh(V+U)}.$$

In den Parametern der Haupttangentenkurven geschrieben nehmen dann die Koordinaten eines Flächenpunktes die folgende Form an:

$$x = \frac{R}{\cosh(V+U)}\cos(V-U), \quad y = \frac{R}{\cosh(V+U)}\sin(V-U),$$

$$z = R[V + U - \operatorname{tgh}(V+U)].$$

Hieraus findet man:

$$E = G = R^2, \quad F = R^2\left(1 - \frac{2}{\cosh^2(V+U)}\right).$$

Damit erhält man auch:

$$\cos\omega = 1 - \frac{2}{\cosh^2(V+U)}; \quad \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\cosh(V+U)}, \quad \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \operatorname{tgh}(V+U).$$

Die oben angegebenen Flächenpunkt-Koordinaten lassen sich dann schließlich noch in einer anderen Form darstellen, von welcher im folgenden Gebrauch gemacht wird:

$$x = R\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos(V-U)$$

$$y = R\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin(V-U)$$

$$z = -R\int \frac{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,d\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Dieses Resultat hätte auch aus unseren früheren Entwickelungen für $A = 0$ in Verbindung mit $\sigma = \frac{\pi}{2}$ gewonnen werden können.

β) Elliptischer Typus.

Koordinaten eines Flächenpunktes: $x = \lambda\sinh\left(\frac{v'}{R}\right)\cos u'$,

$$y = \lambda\sinh\left(\frac{v'}{R}\right)\sin u', \quad z = \int\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{R^2}\cosh^2\left(\frac{v'}{R}\right)}\,dv'; \quad \lambda = \text{konst.}$$

Dieselben lassen sich auch durch elliptische Funktionen eines Parameters τ mit dem Modul $\varkappa$ (Komplementärmodul $\varkappa'$) ausdrücken. Um reelle Flächen zu erhalten, muß $\frac{\lambda}{R} < 1$ sein. Für $\cosh^2\left(\frac{v'}{R}\right)$ gilt der Bereich:

$$1 \leq \cosh^2\left(\frac{v'}{R}\right) \leq \frac{R^2}{\lambda^2}.$$

Setzt man nun $\frac{\lambda}{R} = \sin\alpha$ und $\cos\alpha = \varkappa$, dann ist

$$1 - \frac{\lambda^2}{R^2}\cosh^2\left(\frac{v'}{R}\right) = \varkappa^2\left(1 - \frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}\sinh^2\left(\frac{v'}{R}\right)\right).$$

Mit Hilfe der weiteren Substitution: $\sinh\left(\frac{v'}{R}\right) = \frac{\varkappa}{\varkappa'}\,\mathrm{cn}(\tau, \varkappa)$ gestalten sich die oben angeschriebenen Koordinatenwerte folgendermaßen:

$$x = R\varkappa\,\mathrm{cn}\,\tau\cos u', \quad y = R\varkappa\,\mathrm{cn}\,\tau\sin u', \quad z = R\varkappa^2\int_0^\tau \mathrm{sn}^2\tau\,d\tau.$$

Bei der z-Koordinate wurde statt des negativen Vorzeichens (rechts) das positive gewählt.

Den Übergang zu den Parametern (V, U) der Haupttangentenkurven vermittelt die Differentialgleichung:

$$du' = \pm\frac{dv'}{\sqrt{R^2 - \lambda^2\cosh^2\left(\frac{v'}{R}\right)}}.$$

Dieselbe liefert die Beziehungen:

$$u' = -\tau + \frac{2V}{\varkappa}, \quad u' = \tau - \frac{2U}{\varkappa}.$$

Hieraus ergibt sich: $u' = \frac{V-U}{\varkappa}$, $\quad \tau = \frac{V+U}{\varkappa}$.

Nun kann man auch schreiben:

$$x = R\varkappa\,\mathrm{cn}\left(\frac{V+U}{\varkappa}\right)\cos\left(\frac{V-U}{\varkappa}\right), \quad y = R\varkappa\,\mathrm{cn}\left(\frac{V+U}{\varkappa}\right)\sin\left(\frac{V-U}{\varkappa}\right),$$

$$z = R\varkappa^2\int_0^{\frac{V+U}{\varkappa}} \mathrm{sn}^2\tau\,d\tau.$$

Die Fundamentalgrößen erster Ordnung haben jetzt die Werte:

$$E = G = R^2, \quad F = R^2(2\,\mathrm{sn}^2\tau - 1).$$

Der von den Parameterlinien eingeschlossene Winkel ω berechnet sich aus der Gleichung: $\cos\omega = 2\,\mathrm{sn}^2\tau - 1$.

Damit haben wir auch $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \mathrm{cn}\,\tau$ und $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \mathrm{sn}\,\tau$ erhalten.

Der zweite Typus der pseudosphärischen Rotationsflächen repräsentiert sich nun durch folgende Gleichungen:

$$x = R\varkappa \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{V-U}{\varkappa}\right)$$

$$y = R\varkappa \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{V-U}{\varkappa}\right)$$

$$z = -R\varkappa^2 \int \frac{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}\, d\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

γ) Hyperbolischer Typus.

Koordinaten eines Flächenpunktes:

$$x = \lambda\cosh\left(\frac{v'}{R}\right)\cos u', \qquad y = \lambda\cosh\left(\frac{v'}{R}\right)\sin u',$$

$$z = \int \sqrt{1-\frac{\lambda^2}{R^2}\sinh^2\left(\frac{v'}{R}\right)}\, dv'.$$

Auch hier sollen wieder elliptische Funktionen verwendet werden.

Giltigkeitsbereich von $\sinh^2\left(\frac{v'}{R}\right)$ im Falle reeller Flächen:

$$0 \leqq \sinh^2\left(\frac{v'}{R}\right) \leqq \frac{R}{\lambda}.$$

Da der Ausdruck

$$1-\frac{\lambda^2}{R^2}\sinh^2\left(\frac{v'}{R}\right) = \frac{R^2+\lambda^2}{R^2}\left(1-\frac{\lambda^2}{R^2+\lambda^2}\cosh^2\left(\frac{v'}{R}\right)\right),$$

setze man

$$\frac{R^2}{R^2+\lambda^2} = \varkappa^2 \quad \text{und} \quad \cosh^2\left(\frac{v'}{R}\right) = \frac{R^2+\lambda^2}{\lambda^2}\,\mathrm{dn}^2\tau \quad \text{oder} \quad \cosh\left(\frac{v'}{R}\right) = \frac{\mathrm{dn}(\tau,\varkappa)}{\varkappa'}.$$

Dies hat zur Folge:

$$x = \frac{R}{\varkappa}\,\mathrm{dn}\,\tau\cos u', \qquad y = \frac{R}{\varkappa}\,\mathrm{dn}\,\tau\sin u', \qquad z = R\varkappa\int_0^\tau \mathrm{sn}^2\tau\, d\tau.$$

Zu den Parametern der Haupttangentenkurven leitet über die Differentialgleichung:

$$d u' = \mp \varkappa d\tau.$$

Hieraus ergeben sich die einfachen Beziehungen:

$$u' = -\varkappa\tau + 2\varkappa V, \quad u' = \varkappa\tau - 2\varkappa U.$$

Hiemit erhält man:

$$u' = \varkappa(V - U), \quad \tau = V + U.$$

Jetzt gilt:

$$x = \frac{R}{\varkappa} \operatorname{dn}(V+U)\cos(\varkappa(V-U)), \quad y = \frac{R}{\varkappa} \operatorname{dn}(V+U)\sin(\varkappa(V-U)),$$

$$z = R\varkappa \int_0^{V+U} \operatorname{sn}^2\tau \, d\tau.$$

Ferner: $E = G = R^2, \quad F = R^2(2\varkappa^2 \operatorname{sn}^2\tau - 1).$

Mithin:

$$\cos\omega = 2\varkappa^2 \operatorname{sn}^2\tau - 1; \quad \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \operatorname{dn}\tau, \quad \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \varkappa \operatorname{sn}\tau.$$

Ein Punkt einer pseudosphärischen Rotationsfläche vom dritten Typus hat demnach folgende Koordinaten:

$$x = \frac{R}{\varkappa} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos(\varkappa(V-U))$$

$$y = \frac{R}{\varkappa} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin(\varkappa(V-U))$$

$$z = -\frac{R}{\varkappa} \int \frac{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}} \, d\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Und nun sollen die zu jedem der drei Typen von pseudosphärischen Rotationsflächen gehörenden Voßschen Flächen bestimmt werden.

Ad α)

Man hat hiezu folgendes Material notwendig:

$$X = -\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\varphi, \quad Y = -\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\varphi, \quad Z = -\sin\left(\frac{\omega}{2}\right); \quad \varphi = V - U,$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\partial U} = \frac{\partial\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\partial V} = -\sin\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Laplacesche Differentialgleichung (8), § 2:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial U \partial V} = -\frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial\omega}{\partial U}\left(\frac{\partial M}{\partial U}+\frac{\partial M}{\partial V}\right).$$

Derselben genügt:

$$\frac{\partial M}{\partial U} = C_1 \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2, \quad \frac{\partial M}{\partial V} = C_1 \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2.$$

Unter Benützung von (9) bzw. (13), § 2, erhält man für die x-Koordinate eines Punktes der zu bestimmenden Voßschen Flächen:

$$\frac{\partial x}{\partial U} = C_1\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right] + C_2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\varphi + \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sin\varphi\right]$$

$$\frac{\partial x}{\partial V} = C_1\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right] + C_2\left[-\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\varphi + \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sin\varphi\right].$$

Daraus

$$x = \frac{C_1}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\cos\varphi - C_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\varphi.$$

Analog

$$y = \frac{C_1}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sin\varphi + C_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\varphi$$

$$z = C_1\int\frac{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,d\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2(V-U).$$

Nun setzt man

$$\frac{C_1}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = r\cos\psi, \quad C_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) = r\sin\psi, \quad \varphi+\psi=\chi.$$

Deshalb ist $r = \frac{2}{\sin\omega}\sqrt{C_1^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)}$,

$$\psi = C_1 C_2 \int \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(1+\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}{C_1^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)}\, d\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Mithin: $x = r\cos\chi$, $y = r\sin\chi$,

$$z = C_1 \int \frac{C_1^2\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(C_1^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}\, d\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2\chi.$$

Durch diese Gleichungen sind Schraubenflächen charakterisiert.

Diskussion.

1. Fall: $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$.

Für die Festsetzung der Gestalt des Meridianprofils benütze man:

$$r = \frac{\sqrt{C_1^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$\frac{dr}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)} = -\frac{C_1^2\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{C_1^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)}};$$

$$z = -\frac{C_1}{2}\left[\frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right)\right] - C_2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{C_2}{C_1}\,\frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right),$$

$$\frac{dz}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{C_1\left[C_1^2\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]}{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(C_1^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)};$$

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{C_1\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sqrt{C_1^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$\frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(C_1{}^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+C_2{}^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(2+\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\right)\sqrt{C_1{}^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+C_2{}^2\sin^4\left(\right.}}{C_1{}^2\cos^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(C_1{}^2\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)-C_2{}^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}$$

$$0 \leqq \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqq 1.$$

r nimmt mit wachsendem ω ab von $r = \infty \left(\frac{\omega}{2} = 0\right)$ bis zu einem Minimum $r_{min.} = \sqrt{C_1}\sqrt{C_1 + 2C_2}$, welches für $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ sich einstellt; dann wächst r mit wachsendem Winkel ω bis $r = \infty$. z wächst zuerst, wenn ω wieder in demselben Sinne sich ändert, dann nimmt es ab bis $z = -C_2\frac{\pi}{2}$. Differentialquotient $\frac{dr}{dz}$ hat einen stets negativ bleibenden Wert, welcher von $\frac{dr}{dz} = 0\left(\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1\right)$ bis $\frac{dr}{dz} = -\infty$ (in demselben Sinne kontinuierlich sich ändernd) abnimmt. Der für das Intervall von $\omega = 0$ bis $\omega = \pi$ in Betracht kommende Teil des Meridianprofils besteht demnach aus zwei Zweigen, von denen der eine die unendlich ferne Gerade im unendlich fernen Punkt der z-Achse und der andere die Gerade $z = -C_2\frac{\pi}{2}$ zur Asymptote hat. Der erstere Zweig ist gegen die z-Achse konkav, der letztere hingegen konvex gekrümmt, wie aus dem Werte von $\frac{d^2r}{dz^2}$ leicht zu entnehmen ist. Der Kurvenpunkt, für welchen $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ ist, ist eine Spitze. Diese Überlegungen führen zu der nachstehenden schematischen Figur. (Fig. 6.)

2. Fall: $C_2 = 0$.

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{C_1}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\cos\varphi \\ y &= \frac{C_1}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \varphi = V - U$$

$$z = C_1\int\frac{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,d\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\frac{C_1}{2}\left[\frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right.\right]$$

Voßsche Rotationsflächen.

Material zur Bestimmung der Gestalt des zugehörigen Meridianprofils:

$$r = \frac{C_1}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}, \quad \frac{dr}{dz} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)}{C_1 \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

r wächst von $\left[r_{min.}\right]_{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)=0} = C_1$ bis $\left[r_{max.}\right]_{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)=1} = \infty$; $\frac{dr}{dz}$ verschwindet

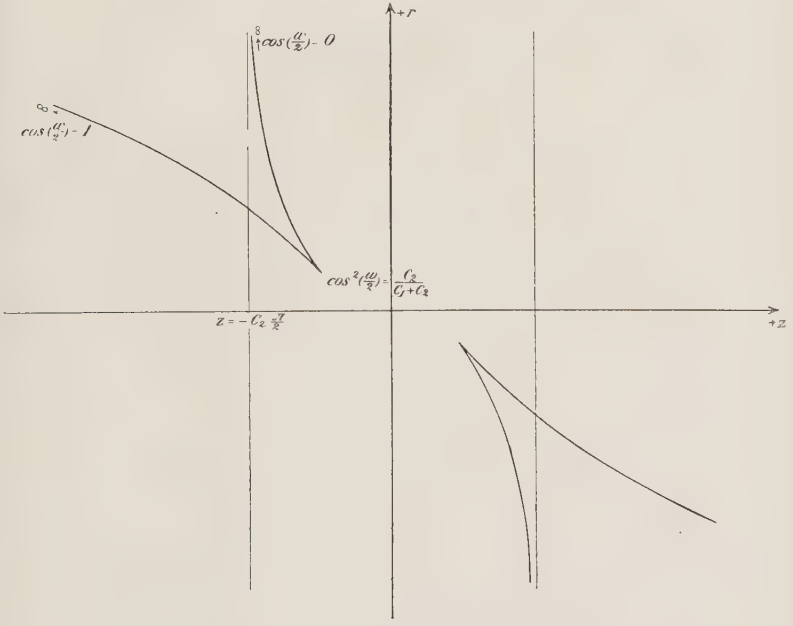

Fig. 6.

im Endlichen nicht; jedoch nimmt es für $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$ den Wert ∞ an, so daß an dieser Stelle, an welcher r seinen kleinsten Wert hat, eine Spitze vorliegt. $\frac{d^2r}{dz^2}$ ist im Endlichen nicht Null und bleibt stets negativ. Die Meridiankurve wendet demnach der z-Achse die konkave Seite zu. Für eine graphische Darstellung wähle man $C = 2$; $\frac{\omega}{2}$ lasse man die Werte von $\frac{\omega}{2} = 90^0$, 89^0, 88^0 . . . . . bis 60^0 durchlaufen.

Ersetzt man $\frac{\omega}{2}$ durch $\pi - \frac{\omega}{2}$, so erhält man einen zum erhaltenen Kurvenzweig in bezug auf die r-Achse symmetrischen Zweig. Punkt A ist eine Spitze.

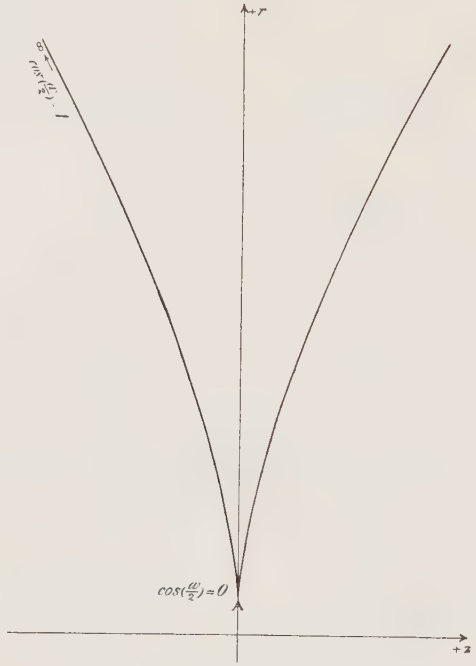

Fig. 7.

3. Fall: $C_1 = 0$.

$$x = -C_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sin\varphi$$
$$y = C_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos\varphi$$
$$z = C_2 \varphi$$

Gemeine Schraubenflächen oder Wendelflächen, die bekanntlich Minimalflächen sind.

Ad β)

$$X = -\varkappa \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\varphi, \quad Y = -\varkappa \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi,$$

$$Z = -\sqrt{1 - \varkappa^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}; \quad \varphi = \frac{V - U}{\varkappa}.$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\partial U} = \frac{\partial\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\partial V} = -\frac{1}{\varkappa}\sqrt{1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Man hat dann denselben Weg einzuschlagen wie im Fall α) und erhält:

$$\frac{\partial x}{\partial U} = C_1\left[\frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right]$$

$$+ C_2\left[\frac{\sqrt{1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}\cos\varphi + \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sin\varphi\right]$$

$$\frac{\partial x}{\partial V} = C_1\left[\frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right]$$

$$+ C_2\left[-\frac{\sqrt{1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}\cos\varphi + \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sin\varphi\right].$$

Daraus $$x = \frac{C_1\varkappa}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\cos\varphi - C_2\varkappa\frac{\sqrt{1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sin\varphi.$$

In analoger Weise berechnet sich die zweite Koordinate

$$y = \frac{C_1\varkappa}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sin\varphi + C_2\varkappa\frac{\sqrt{1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}\cos\varphi.$$

Für die dritte Koordinate gilt:

$$\frac{\partial z}{\partial U} = -C_1\varkappa\,\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2\varkappa, \quad \frac{\partial z}{\partial V} = -C_1\varkappa\,\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2\varkappa.$$

Mithin: $$z = C_1\varkappa^2\int\frac{\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}\,d\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2\varkappa(V-U).$$

Setzt man nun

$$\frac{C_1 \varkappa}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = r\cos\psi \quad \text{und} \quad C_2 \varkappa \frac{\sqrt{1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} = r\sin\psi,$$

so ist $$r = \frac{2\varkappa}{\sin\omega}\sqrt{C_1^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}$$

und

$$\psi = C_1 C_2 \int \frac{\left(1-\varkappa^2\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) d\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[C_1^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\right]}}$$

Bezeichnet man ferner noch $\varphi + \psi$ mit χ, wo $\varphi = \frac{V-U}{\varkappa}$, so erhält man:

$$x = r\cos\chi, \quad y = r\sin\chi$$

$$z = C_1\varkappa^2 \int \frac{C_1^2\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[C_1^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(1-\varkappa^2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\right]}} d\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2\varkappa$$

Dieser Fall führt also gleichfalls zu Schraubenflächen.

Diskussion.

1. Fall: $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$.

$$r = \frac{\varkappa\sqrt{C_1^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$\frac{dr}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)} = -\frac{\varkappa\left(C_1^2\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{C_1^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}},$$

$$\frac{dz}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)} = -\frac{C_1\varkappa^2\left(C_1^2\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2^2\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[C_1^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(1-\varkappa^2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\right]}}$$

$$\frac{r}{z} = -\frac{1}{C_1 \varkappa} \frac{\sqrt{1-\varkappa^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \sqrt{C_1^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(1-\varkappa^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)},$$

$$\frac{d^2 r}{z^2} = -\frac{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(C_1^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\left(\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + 1 - 2\varkappa^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \varkappa^4 \cos^6\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\right)}{C_1^2 \varkappa^3 \cos^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(C_1^2 \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2^2 \sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}$$

$$\cdot \sqrt{C_1^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(1-\varkappa^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)};$$

$$0 \leqq \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqq 1.$$

ω soll wie früher wieder von $\omega = 0$ bis $\omega = \pi$ wachsen. r nimmt dann (in einem 1. Bereich) beständig ab von $r = \infty \left(\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1\right)$ bis zu einem Minimum $r_{min.} = \varkappa \sqrt{(C_1 + C_2)^2 - \varkappa^2 C_2^2}$, welches für $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ sich ergibt; hierauf wächst r (in einem 2. Bereich) kontinuierlich bis $r = \infty$. z dagegen wächst im 1. Bereich von $z = -\infty$ bis zu einem Maximum $\left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)$, während es im 2. Bereich bis zu einer endlichen Größe wieder abnimmt. $\frac{dr}{dz}$ behält stets seinen negativen Wert $(C_1 > 0)$, nimmt für $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1 (r = \infty, \quad z = -\infty)$ den Grenzwert $\frac{dr}{dz} = -\frac{\varkappa'}{\varkappa}$ an, so daß in diesem Punkt die Meridiankurve eine Asymptote hat, und für $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$ den Grenzwert $\frac{dr}{dz} = -\infty (r = \infty)$, weshalb das Meridianprofil eine zweite Asymptote hat, die eine Gerade parallel zur r-Achse ist. $\frac{d^2 r}{dz^2}$ ist im 1. Bereich negativ, im zweiten jedoch positiv, was durch

das Vorzeichen der Differenz $C_1{}^2 \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2{}^2 \sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)$ bewirkt wird.

Der Punkt, welcher dem Werte $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ entspricht, ist eine Spitze.

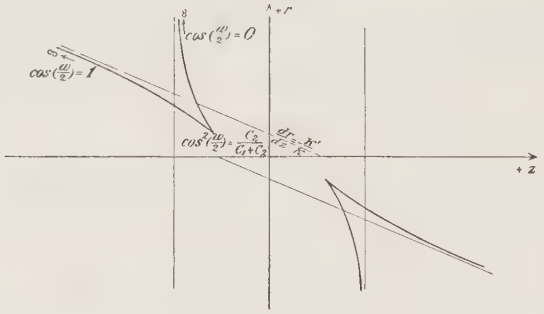

Fig. 8.

2. Fall: $C_2 = 0$.

$$x = \frac{C_1 \varkappa}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cos\varphi\,, \quad y = \frac{C_1 \varkappa}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \sin\varphi\,,$$

$$z = C_1 \varkappa^2 \int \frac{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}\, d\left(\frac{\omega}{2}\right); \quad \varphi = \frac{V - U}{\varkappa}.$$

Es liegen hier Rotationsflächen vor, deren Meridianprofil bestimmt ist durch:

$$r = \frac{C_1 \varkappa}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}; \quad \frac{dr}{dz} = -\frac{\sqrt{1 - \varkappa^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\varkappa \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)}{C_1 \varkappa^3 \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)}; \quad 0 \leqq \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqq 1.$$

r nimmt ab von $\left[r_{max.}\right]_{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)=1} = \infty$ bis $\left[r_{min.}\right]_{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)=0} = C_1 \varkappa$; $\frac{dr}{dz}$ verschwindet

nicht, nimmt für $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1\,[r = \infty,\ z = -\infty]$ den Wert $\frac{dr}{dz} = -\frac{\varkappa'}{\varkappa}$ und für $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$ den Wert $-\infty$ an. $\frac{d^2r}{dz^2}$ bleibt immer negativ ($C_1 > 0$) und verschwindet nicht im Endlichen. Die Kurve fällt fortwährend und kehrt der z-Achse die konkave Seite zu. Ersetzt man $\frac{\omega}{2}$ durch $\pi - \frac{\omega}{2}$, so erhält man einen zur r-Achse symmetrischen Kurvenzweig. Punkt A ist eine Spitze.

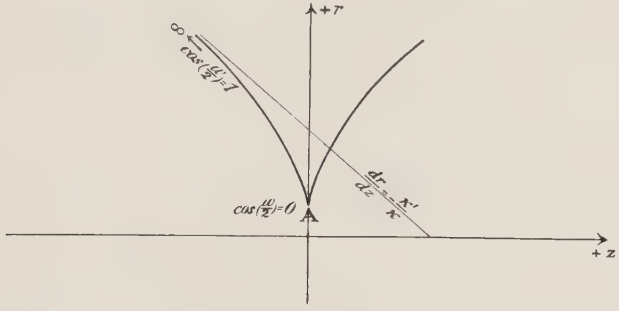

Fig. 9.

3. Fall: $C_1 = 0$.

$$x = -C_2\varkappa\frac{\sqrt{1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sin\varphi, \qquad y = C_2\varkappa\frac{\sqrt{1-\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}\cos\varphi,$$

$$z = C_2\varkappa^2\varphi.$$

Dies sind gemeine Schraubenflächen (Wendelflächen).

A d γ)

$$X = -\frac{1}{\varkappa}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\varphi, \quad Y = -\frac{1}{\varkappa}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\varphi,$$

$$Z = -\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}; \quad \varphi = \varkappa(V - U).$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\partial U} = \frac{\partial\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\partial V} = -\sqrt{\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Dann Fortsetzung wie bei Fall α). Man erhält für die hierher gehörenden Voßschen Flächen folgende Gleichungen:

$$x = \frac{C_1}{\varkappa \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cos\varphi - \frac{C_2}{\varkappa^2} \frac{\sqrt{\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} \sin\varphi,$$

$$y = \frac{C_1}{\varkappa \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \sin\varphi + \frac{C_2}{\varkappa^2} \frac{\sqrt{\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cos\varphi,$$

$$z = \frac{C_1}{\varkappa} \int \frac{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}} d\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{C_2}{\varkappa}(V - U).$$

Nun setze man $$\frac{C_1}{\varkappa \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = r\cos\psi$$

und $$\frac{C_2}{\varkappa^2} \frac{\sqrt{\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} = r\sin\psi,$$

dann hat man:

$$r = \frac{2}{\varkappa^2 \sin\omega} \sqrt{C_1^2 \varkappa^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2 \left(\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad \text{und}$$

$$\psi = \varkappa C_1 C_2 \int \frac{\varkappa^2 - \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[C_1^2 \varkappa^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\left(\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]}} d\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Bezeichnet man noch $\varphi + \psi$ mit χ und beachtet man, daß $\varphi = \varkappa(V - U)$, dann kann man schreiben:

$$x = r\cos\chi, \quad y = r\sin\chi$$

$$z = C_1 \varkappa \int \frac{C_1^2 \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2^2 \sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[C_1^2 \varkappa^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\left(\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]}} d\left(\frac{\omega}{2}\right) +$$

Durch diese Gleichungen sind Schraubenflächen charakterisiert.

Diskussion.

1. Fall: $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$; $C_1 > 0$.

$$r = \frac{\sqrt{C_1^2 \varkappa^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\left(\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\varkappa^2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$\frac{dr}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)} = -\frac{C_1^2 \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2^2 \sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{C_1^2 \varkappa^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\left(\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}};$$

$$\frac{dz}{d\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{C_1 \varkappa\left(C_1^2 \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2^2 \sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}\left[C_1^2 \varkappa^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\left(\varkappa^2 - \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]},$$

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{1}{C_1 \varkappa}\frac{\sqrt{\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sqrt{C_1^2 \varkappa^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\left(\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$\frac{r}{z^2} = -\frac{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(C_1^2 \varkappa^4 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\left(\varkappa^4 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \varkappa^4 - 2\varkappa^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \cos^6\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\right)}{\varkappa^2 C_1^2 \cos^3\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(C_1^2 \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2^2 \sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)}$$

$$\cdot\sqrt{C_1^2 \varkappa^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2^2\left(\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$0 \leqq \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqq \varkappa^2.$$

Setzt man $\varkappa \operatorname{sn}\tau$ für $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$, wobei $\tau = V + U$, so erhält man ferner:

$$r = \frac{\sqrt{C_1^2 \varkappa^2 \operatorname{sn}^2\tau + C_2^2 \operatorname{cn}^2\tau \operatorname{dn}^2\tau}}{\varkappa^2 \operatorname{sn}\tau \operatorname{dn}\tau},$$

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{1}{C_1 \varkappa}\frac{\operatorname{cn}\tau}{\operatorname{sn}^2\tau}\sqrt{C_1^2 \varkappa^2 \operatorname{sn}^2\tau + C_2^2 \operatorname{cn}^2\tau \operatorname{dn}^2\tau};$$

$$= -\frac{C_1}{\varkappa}\left[\left(\frac{1}{\varkappa'^2}\frac{E}{K} - 1\right)\tau + \frac{1}{\varkappa'^2} Z(\tau) - \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}\frac{\operatorname{sn}\tau \operatorname{cn}\tau}{\operatorname{dn}\tau}\right] - \frac{C_2}{\varkappa^2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{C_2}{C_1 \varkappa}\frac{\operatorname{cn}\tau \operatorname{dn}\tau}{\operatorname{sn}\tau}\right),$$

wo $Z(\tau)$ die Jakobische Funktion, E und K die bekannten vollständigen Integrale aus der Theorie der elliptischen Funktionen sind.

Für τ kommen zunächst die Intervalle von 0 bis K und von K bis 2 K in Betracht. r nimmt mit abnehmendem $\frac{\omega}{2}$ beständig ab von $r = \infty \quad \left(\tau = 0, \quad \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0\right)$ bis zu einem Minimum $r_{min.} = \frac{1}{\varkappa^2}\sqrt{\varkappa^2 (C_1 + C_2)^2 - C_2^2}$ an der Stelle, welche durch $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ bestimmt wird (1. Bereich); von hier ab wächst r fortwährend bis zu einem endlichen Maximum $r_{max.} = \frac{C_1}{\varkappa \varkappa'}$, welches für $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \varkappa (\tau = K)$ eintritt (2. Bereich). Die z-Koordinate bleibt stets negativ; sie nimmt im ersten Bereiche zu, im zweiten jedoch ab. Für $\tau = 0$ hat sie den Wert $z = -\frac{C_2}{\varkappa^2}\frac{\pi}{2}$ und für $\tau = K$ den Wert $z = -\frac{C_1}{\varkappa}\left[\frac{E}{\varkappa'^2} - K\right] = -\frac{C_1 \varkappa}{\varkappa'^2}\int_0^K \mathrm{cn}^2 \tau \, d\tau$. Der Differentialquotient $\frac{dr}{dz}$ bleibt für den bis jetzt in Frage kommenden Teil des Medianprofils immer negativ; für $\tau = 0$ wird er gleich $-\infty$ ($r = \infty$, Asymptote) und für $\tau = K$ verschwindet er. $\frac{d^2 r}{dz^2}$ hängt von der Differenz $C_1^2 \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - C_2^2 \sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ab. Daher ist das Vorzeichen dieses Differentialquotienten im ersten Bereiche positiv, im zweiten dagegen negativ. Die Kurve ist mithin zuerst konvex und dann konkav gegen die z-Achse gekrümmt. In dem Punkte, welcher dem Werte $\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ entspricht, hat sie eine Spitze. Läßt man nun τ das Intervall von $\tau = K$ bis 2 K durchlaufen, so erhält man einen in bezug auf die (zur r-Achse parallele) Gerade $z = -\frac{C_1}{\varkappa}\left[\frac{E}{\varkappa'^2} - K\right]$ symmetrischen Kurvenzweig; denn es läßt sich zeigen, daß $2 z_{(K)} = z_{(K+\tau)} + z_{(K-\tau)}$ ist, wobei $z_{(K)}$, $z_{(K+\tau)}$ und $z_{(K-\tau)}$ jene Werte sind, welche die z-Koordinate annimmt, wenn man in dem für sie berechneten

Ausdrucke τ bzw. durch K, $K+\tau$ und $K-\tau$ ersetzt. Ferner ist auch $r_{(K+\tau)} = r_{(K-\tau)}$. Differentialquotient $\frac{dz}{dr}$ bleibt in dem Bereiche von $\tau = K$ bis $\tau = 2K$ immer positiv. Für $\tau = 2K$ nimmt er den Wert $+\infty$ an und die z-Koordinate hat die Größe $z = -\left\{2\frac{C_1}{\varkappa}\left[\frac{E}{\varkappa'^2} - K\right] - \frac{C_2}{\varkappa^2}\frac{\pi}{2}\right\}$. Ersetzt man schließlich τ durch $\tau + 2K$ $\left(\frac{\omega}{2}\right.$ durch $\left.\pi - \frac{\omega}{2}\right)$, so bekommt man, weil nun r und z gleichzeitig negativ sind, einen analog gebauten, unterhalb der z-Achse gelegenen Kurvenzweig (τ bewegt sich von 2K bis 4K); diesem Zweig gehört die Gerade $z = -2\frac{C_1}{\varkappa}\left[\frac{E}{\varkappa'^2} - K\right]$ als neue (verschobene) r-Achse zu. Wird endlich τ negativ gewählt, so erhält man dieselben zwei Kurvenzweige, freilich in umgekehrter Reihenfolge, auf der anderen Seite der r-Achse. Noch ist zu konstatieren, daß eine periodische Wiederholung der Kurvenzweige zu beachten ist.

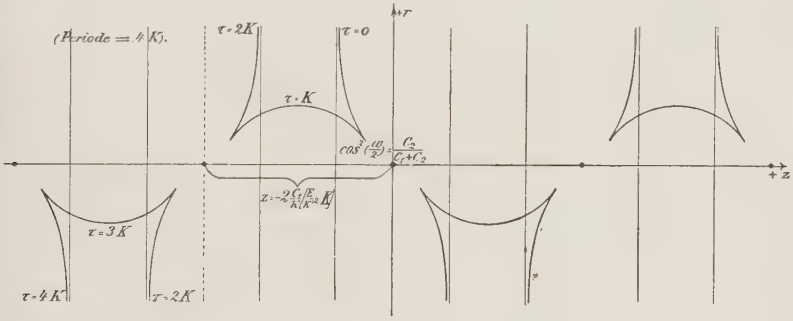

Fig. 10.

2. Fall: $C_2 = 0$.

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{C_1}{\varkappa \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cos\varphi \\ y &= \frac{C_1}{\varkappa \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \sin\varphi \\ z &= \frac{C_1}{\varkappa}\int \frac{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}\, d\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \varphi = \varkappa(V - U)$$

Rotationsflächen.

(Vgl. auch A. Tachauer, Diss., Würzburg 1903, pag. 58, 62 u. 67.)

Gestalt des Meridianprofils.

$$r = \frac{C_1}{\varkappa \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}, \quad z = \frac{C_1}{\varkappa} \int \frac{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}} \, d\left(\frac{\omega}{2}\right);$$

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{\sqrt{\varkappa^2 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}, \quad \frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{\varkappa^3}{C_1} \frac{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)};$$

$$0 \leqq \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqq \varkappa^2.$$

Oder unter Anwendung von elliptischen Funktionen, wenn man $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \varkappa \operatorname{sn} \tau$ setzt:

$$r = \frac{C_1}{\varkappa \operatorname{dn} \tau}, \quad z = -\frac{C_1}{\varkappa}\left[\left(\frac{1}{\varkappa'^2}\frac{E}{K} - 1\right)\tau + \frac{1}{\varkappa'^2} Z(\tau) - \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2} \frac{\operatorname{sn}\tau \operatorname{cn}\tau}{\operatorname{dn}\tau}\right];$$

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{\operatorname{cn}\tau}{\operatorname{sn}\tau}, \quad \frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{1}{C_1 \varkappa} \frac{\operatorname{dn}^3 \tau}{\operatorname{sn}^4 \tau}.$$

Aus dem angeschriebenen Material erkennt man leicht Folgendes. Die Größe r nimmt mit abnehmendem $\frac{\omega}{2}$ beständig zu von

$$\left[r_{\text{min.}}\right]_{\tau=0} = \frac{C_1}{\varkappa} \text{ bis } \left[r_{\text{max.}}\right]_{\tau=K} = \frac{C_1}{\varkappa \varkappa'}$$

und hierauf fortwährend ab bis zu dem Ausgangswerte $\left[r_{\text{min.}}\right]_{\tau=2K} = \frac{C_1}{\varkappa}$.

Die z-Koordinate hat bzw. die Werte 0, $-\frac{C_1}{\varkappa}\left[\frac{E}{\varkappa'^2} - K\right]$ und $-2\frac{C_1}{\varkappa}\left[\frac{E}{\varkappa'^2} - K\right]$. Es herrscht Symmetrie in bezug auf die Gerade $z = -\frac{C_1}{\varkappa}\left[\frac{E}{\varkappa'^2} - K\right]$. Für $\frac{dr}{dz}$ sind bzw. die Werte $-\infty$, 0 und $+\infty$ zu notieren; in dem Intervall von $\tau = 0$ bis K ist $\frac{dr}{dz}$ negativ, in dem Intervall von K bis 2K jedoch positiv. $\frac{d^2r}{dz^2}$ ist stets negativ. Wächst τ um 2K, so kehrt derselbe Kurvenzweig periodisch wieder.

Ersetzt man τ durch $-\tau\left(\frac{\omega}{2}\right.$ durch $\left.\pi-\frac{\omega}{2}\right)$, so erhält man einen zur r-Achse symmetrischen Zweig. Die Punkte, welche den Werten $\tau = 0,\ 2K$ usw. entsprechen, sind Spitzen.

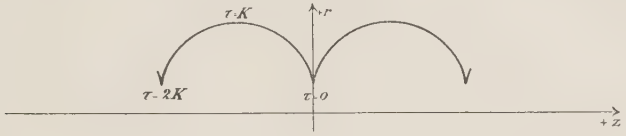

Fig. 11.

3. Fall: $C_1 = 0$.

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{C_2}{\varkappa^2}\,\frac{\sqrt{\varkappa^2-\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sin\varphi \\ y &= \frac{C_2}{\varkappa^2}\,\frac{\sqrt{\varkappa^2-\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}\cos\varphi \\ z &= \frac{C_2}{\varkappa^2}\,\varphi \end{aligned}\right\}$$ Gemeine Schraubenflächen (Wendelflächen).

Damit ist die Reihe der den pseudosphärischen Rotationsflächen entsprechenden Voßschen Flächen beendet.

§ 6.

Behandlung des Falles: $A = 0$, $\sigma \neq$ const.

Diesen Fall erörterte Kuen (cfr. Martin Schilling, mathematische Modelle, Halle a. S. 1904, 1. Folge). Er erkannte, daß eine zweite Gruppe von pseudosphärischen Enneperschen Flächen in dem Fall $A = 0$, ohne daß σ konstant ist, inbegriffen ist, und konstatierte, daß dieses gerade diejenige Lösung sei, welche durch Nullsetzen von B in der Gleichung (12*), § 1:

$$\frac{1}{\sin^2\sigma} = A'\cos(2iu_1) - Bi\sin(2iu_1) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

verloren geht, nämlich die Lösung für $A' = B$, wobei in der zitierten Gleichung $A = A'$ gesetzt wurde.

Unter Annahme dieser Gleichung (1) ergeben sich dann für die Enneperschen Pseudosphären folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} x = \varrho\cos\varphi, \quad y &= \varrho\sin\varphi \\ z\,\frac{\sqrt{C^2 - A'^2 + B^2}}{R} &= \int \sqrt{C - A'\cos(2iv_1) - Bi\sin(2iv_1)}\; dv_1 \\ &+ i\tan g(i(u_1 + v_1))\sqrt{C - A'\cos(2iv_1) - Bi\sin(2iv_1)} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\varrho\,\frac{\sqrt{C^2 - A'^2 + B^2}}{R} = \frac{1}{\cos(i(u_1 + v_1))}\,\frac{1}{\sin\sigma} \quad (3)$$

$$\sin^2\sigma = \frac{1}{C + A'\cos(2iu_1) - Bi\sin(2iu_1)} \quad (4)$$

$$\frac{d\varphi}{du'} = \frac{\sqrt{C^2 - A'^2 + B^2}}{R}\sin^2\sigma \quad (5)$$

$$\frac{d\sigma}{du'} = \frac{\sin^2\sigma}{R}(iA'\sin(2iu_1) - B\cos(2iu_1)) \quad (6)$$

$$\left(R\,\frac{du_1}{du'}\right)^2 = C + A'\cos(2iu_1) - Bi\sin(2iu_1) - 1 \quad (7)$$

$$\left(R\,\frac{dv_1}{dv'}\right)^2 = C - A'\cos(2iv_1) - Bi\sin(2iv_1). \quad (8)$$

Und nun möge zur eigentlichen Behandlung des Falles $A' = B$ (in bezug auf die Kuensche Darstellung) oder $A = 0$, $\sigma + \text{const.}$ (in bezug auf die Enneper sche Entwickelung) geschritten werden.

Man erhält da: $$\frac{1}{\sin^2\sigma} = C + A'e^{2u_1} \quad (9)$$

oder wegen $\frac{du_1}{du'} = \frac{1}{R}\operatorname{ctg}\sigma$ [(8), § 1]:

$$\left(R\,\frac{du_1}{du'}\right)^2 + 1 = C + A'e^{2u_1}. \quad (9')$$

Ferner erhält man nach Kuen:

$$\left(R\,\frac{dv_1}{dv'}\right)^2 = C - A'e^{-2v_1}. \quad (10)$$

Nach Enneper aber galt für $B = 0$:

$$\frac{1}{\sin^2\sigma} = C + A\cos(2iu_1) = C + \frac{A}{2}(e^{2u_1} + e^{-2u_1}), \quad (9^*)$$

$$\left(R\,\frac{dv_1}{dv'}\right)^2 = C - A\cos(2iv_1) = C - \frac{A}{2}(e^{2v_1} + e^{-2v_1}). \quad (10^*)$$

Daraus ersieht man, daß sich aus den für $B = 0$ aufgestellten Gleichungen die für $A' = B$ geltenden ableiten lassen, indem man in den ersteren $A = 0$ setzt, wo es für sich alleinstehend vorkommt, wie in der Verbindung $C^2 - A^2$ z. B. es der Fall ist, ferner indem man $u_1 = u_1 + c$ sowie $v_1 = v_1 - c$, wo c eine unendlich große Konstante ist, und schließlich $\frac{A}{2} e^{2c} = A'$ setzt. Für $A = 0$ ist dann auch $\frac{A'}{e^{2c}} = 0$, also $A' + 0$.

Das eben Gesagte findet seine Bestätigung auch an der Gleichung:

$$\frac{d\sigma}{du'} = -\frac{1}{R} \frac{A' e^{2u_1}}{C + A' e^{2u_1}}, \tag{11}$$

die sich aus der in § 1 unter (16) aufgeführten, nämlich aus

$$\frac{d\sigma}{du'} = \frac{i}{R} A \sin(2 i u_1) \sin^2\sigma$$

herleiten läßt. Mithin ist, wenn $A = 0$, in diesem Falle σ nicht konstant.

Kuen verwendete zur Weiterführung seiner Abhandlung folgende Substitutionen:

$$U = e^{\frac{u}{R}\sqrt{C-1}}, \qquad V = e^{-\frac{v}{R}\sqrt{C}}.$$

Mit Rücksicht auf unsere Bezeichnungsweise wollen wir schreiben:

$$U_1 = e^{\frac{u'}{R}\sqrt{C-1}}, \quad V_1 = e^{-\frac{v'}{R}\sqrt{C}} \tag{12}$$

Aus (9′) und (10) erhält man dann:

$$e^{u_1} = \frac{2 U_1 \sqrt{\frac{l(C-1)}{A'}}}{l - U_1^2} \quad \text{bzw.} \quad e^{-v_1} = \frac{2 V_1 \sqrt{\frac{k C}{A'}}}{k + V_1^2}, \tag{13}$$

wo k und l bei der Integration in die Rechnung eintretende Konstante sind. Diesen Gleichungen sind noch die folgenden anzureihen:

$$\varrho \frac{C}{R} = \frac{\sqrt{C + A' e^{2u_1}}}{\cos(i(u_1 + v_1))}$$

oder

$$\varrho = 2R\sqrt{k l}\sqrt{C-1} \frac{U_1 V_1 (k + V_1^2) \sqrt{l^2 + U_1^4 - 2l\frac{2-C}{C} U_1^2}}{k C V_1^2 (l - U_1^2)^2 + l(C-1) U_1^2 (k + V_1^2)}. \tag{14}$$

$$\frac{d\varphi}{du'} = \frac{C}{R}\,\frac{1}{C + A' e^{2u_1}} = \frac{1}{R}\,\frac{(1-U_1^2)^2}{1^2 + U_1^4 - 2\,1\,\frac{2-C}{C}\,U_1^2}, \tag{15}$$

$$z\,\frac{C}{R} = \int \sqrt{C - A' e^{-2v_1}}\,dv_1 + i\,tg\,(i\,(u_1 + v_1))\,\sqrt{C - A' e^{-2v_1}}. \tag{16}$$

Zur Weiterbehandlung unseres Problems ist es notwendig, wieder zu den Haupttangentenkurven (V, U) überzugehen; dies geschieht durch die Beziehungen:

$$u' = R\,(V - U)\ , \qquad v' = R\,(V + U); \tag{17}$$

$$U_1 = e^{\sqrt{C-1}\,(V-U)}\ , \qquad V_1 = e^{-\sqrt{C}\,(V+U)}. \tag{18}$$

Die Fundamentalgrößen 1. Ordnung haben folgende Werte:

$$E = G = R^2 \text{ und } F = R^2\left(1 - \frac{2}{\cos^2(i\,(u_1 + v_1))}\right).$$

Mithin ist, weil

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{E\,G}} = 1 - 2\left(\frac{1}{\cos(i\,(u_1 + v_1))}\right)^2,$$

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\cos(i\,(u_1 + v_1))}, \qquad \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = i\,\frac{\sin(i\,(u_1 + v_1))}{\cos(i\,(u_1 + v_1))}, \tag{19}$$

wobei

$$\cos(i\,(u_1 + v_1)) = \frac{1}{2}\,\frac{1\,(C-1)\,U_1^2\,(k + V_1^2)^2 + k\,C\,V_1^2\,(1 - U_1^2)^2}{\sqrt{k\,C}\,\sqrt{1\,(C-1)\,U_1\,V_1\,(k + V_1^2)\,(1 - U_1^2)}}, \tag{20}$$

$$\sin(i\,(u_1 + v_1)) = \frac{i}{2}\,\frac{1\,(C-1)\,U_1^2\,(k + V_1^2)^2 - k\,C\,V_1^2\,(1 - U_1^2)^2}{\sqrt{k\,C}\,\sqrt{1\,(C-1)\,U_1\,V_1\,(k + V_1^2)\,(1 - U_1^2)}}. \tag{21}$$

Aus dem Vorhergehenden resultiert dann:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial U} &= 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[-\sqrt{C-1}\,\frac{1 + U_1^2}{1 - U_1^2} + \sqrt{C}\,\frac{k - V_1^2}{k + V_1^2}\right] \\ \frac{\partial\omega}{\partial V} &= 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[\sqrt{C-1}\,\frac{1 + U_1^2}{1 - U_1^2} + \sqrt{C}\,\frac{k - V_1^2}{k + V_1^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Die Gleichung (7), § 2 wird von diesen beiden Werten erfüllt. Dieselben hat man in Gleichung (8), § 2 einzusetzen, welche zum Übergang zu den entsprechenden Voßschen Flächen notwendig ist. Doch es stellen sich auch hier dem weiteren Vorwärtsdringen dieselben Schwierigkeiten wie früher im § 4 entgegen.

Schließlich soll noch ein von Bianchi[1]) behandelter Fall (Komplementärfläche der Pseudosphäre) untersucht werden hinsichtlich der zugehörigen Voßschen Flächen. Derselbe tritt ein für folgende Spezialisierung der Konstanten, nämlich für

$$C = 1, \quad A' = 4, \quad k = 1, \; l = 1.$$

Bei Substituierung dieser Werte nehmen die für das Problem notwendigen Größen die Form unbestimmter Ausdrücke an, welche jedoch durch Entwickelung der Exponentialfunktion in eine Reihe leicht ausgewertet werden können. Man erhält auf diese Weise:

$$\varrho = \frac{4 R e^{-\frac{v'}{R}}\left(1 + e^{-\frac{2v'}{R}}\right)\sqrt{1+\frac{u'^2}{R^2}}}{\frac{4u'^2}{R^2} e^{-\frac{2v'}{R}} + \left(1 + e^{-\frac{2v'}{R}}\right)^2} = \frac{2R\sqrt{1+(V-U)^2}\cosh(V+U)}{(V-U)^2 + \cosh^2(V+U)} \qquad (14^*)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial U} = -\frac{1}{1+\frac{R^2}{u'^2}} = -\frac{(V-U)^2}{1+(V-U)^2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial V} = \frac{1}{1+\frac{R^2}{u'^2}} = \frac{(V-U)^2}{1+(V-U)^2} \qquad (15^*)$$

$$z = v' + \mu - \frac{2kR}{\sqrt{C}} \frac{1}{k + V_1^2}$$

$$+ \frac{R}{\sqrt{C}} \frac{Ck(1-U_1^2)^2 V_1^2 - l(C-1) U_1^2 (k+V_1^2)^2}{Ck(1-U_2^2)^2 V_1^2 + l(C-1) U_1^2 (k+V_1^2)^2} \frac{k - V_1^2}{k + V_1^2}. \qquad (16')$$

Setzt man hier die Integrationskonstante $\mu = R$, dann ergibt sich mit Hilfe des unmittelbar vorher Angeführten:

$$z = v' - 2R \frac{1 - e^{-\frac{4v'}{R}}}{\frac{4u'^2}{R^2} e^{-\frac{2v'}{R}} + \left(1 + e^{-\frac{2v'}{R}}\right)^2}$$

$$= R\left[V + U - 2\frac{\sinh(V+U)\cosh(V+U)}{(V-U)^2 + \cosh^2(V+U)}\right] \qquad (16^*)$$

---

[1]) Bianchi, Inaug.-Diss.: „Ricerche sulle superficie a curvatura constante e sulle Elicoidi, Pisa 1879". Vgl. auch Bianchi, Differentialgeometrie, pag. 476 und 477.

$$\left.\begin{aligned}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) &= -\frac{4\frac{u'}{R}e^{-\frac{v'}{R}}\left(1+e^{-\frac{2v'}{R}}\right)}{4\frac{u'^2}{R^2}e^{-\frac{2v'}{R}}+\left(1+e^{-\frac{2v'}{R}}\right)^2} = -2\frac{(V-U)\cosh(V+U)}{(V-U)^2+\cosh^2(V+U)}\\ \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \frac{\frac{4u'^2}{R^2}e^{-\frac{2v'}{R}}-\left(1+e^{-\frac{2v'}{R}}\right)^2}{4\frac{u'^2}{R^2}e^{-\frac{2v'}{R}}+\left(1+e^{-\frac{2v'}{R}}\right)^2} = \frac{(V-U)^2-\cosh^2(V+U)}{(V-U)^2+\cosh^2(V+U)}\end{aligned}\right\}(19$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial U} &= 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(\frac{R}{u'}+\frac{1-e^{-\frac{2v'}{R}}}{1+e^{-\frac{2v'}{R}}}\right) = 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(\frac{1}{V-U}+\tanh(V+U)\right)\\ \frac{\partial\omega}{\partial V} &= 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(-\frac{R}{u'}+\frac{1-e^{-\frac{2v'}{R}}}{1+e^{-\frac{2v'}{R}}}\right) = 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(-\frac{1}{V-U}+\tanh(V+U)\right)\end{aligned}\right\}(22$$

Für die Richtungskosinus der Flächennormale findet man folgende Werte:

$$X = -\frac{1}{\sqrt{1+(V-U)^2}}\sin\varphi+\frac{V-U}{\sqrt{1+(V-U)^2}}\frac{(V-U)^2-\cosh^2(V+U)+2}{(V-U)^2+\cosh^2(V+U)}\cos$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{1+(V-U)^2}}\cos\varphi+\frac{V-U}{\sqrt{1+(V-U)^2}}\frac{(V-U)^2-\cosh^2(V+U)+2}{(V-U)^2+\cosh^2(V+U)}\sin$$

$$Z = -\frac{2(V-U)\sinh(V+U)}{(V-U)^2+\cosh^2(V+U)} = \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\sinh(V+U)}{\cosh(V+U)}.$$

Setzt man nun:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(V-U)^2}} = \varrho'\sin\psi,\quad \frac{V-U}{\sqrt{1+(V-U)^2}}\frac{(V-U)^2-\cosh^2(V+U)+2}{(V-U)^2+\cosh^2(V+U)} = \varrho'\cos\psi$$

so erhält man:

$$X = \sqrt{1-\left(\frac{2(V-U)\sinh(V+U)}{(V-U)^2+\cosh^2(V+U)}\right)^2}\cos\chi,$$

$$Y = \sqrt{1-\left(\frac{2(V-U)\sinh(V+U)}{(V-U)^2+\cosh^2(V+U)}\right)^2}\sin\chi,$$

wobei $$\chi = \varphi+\psi,\quad \sqrt{1-\left(\frac{2(V-U)\sinh(V+U)}{(V-U)^2+\cosh^2(V+U)}\right)^2} = \varrho',$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{V-U}\frac{(V-U)^2+\cosh^2(V+U)}{(V-U)^2-\cosh^2(V+U)+2}.$$

Für χ gelten die Beziehungen:

$$\frac{\partial \chi}{\partial U} = -\frac{1}{1-\left(\frac{2(V-U)\sinh(V+U)}{(V-U)^2+\cosh^2(V+U)}\right)^2}$$

$$\cdot\left[1-2\frac{(V-U)^2\cosh^2(V+U)+((V-U)\sinh(V+U)+\cosh(V+U))^2)}{((V-U)^2+\cosh^2(V+U))^2}\right]$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial V} = \frac{1}{1-\left(\frac{2(V-U)\sinh(V+U)}{(V-U)^2+\cosh^2(V+U)}\right)^2}$$

$$\cdot\left[1-2\frac{(V-U)^2\cosh^2(V+U)+((V-U)\sinh(V+U)-\cosh(V+U)^2}{((V-U)^2+\cosh^2(V+U))^2}\right],$$

Oder

$$\frac{\partial \chi}{\partial U} = -\frac{1}{1-\left(\frac{2(V-U)\sinh(V+U)}{(V-U)^2+\cosh^2(V+U)}\right)^2}\cdot\frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial U},$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial V} = \frac{1}{1-\left(\frac{2(V-U)\sinh(V+U)}{(V-U)^2+\cosh^2(V+U)}\right)^2}\cdot\frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial V}.$$

Im übrigen stößt man bei der Behandlung der Gleichungen (13) des Paragraphen 2 auf dieselben Schwierigkeiten wie früher.

Lebenslauf.

Ich, Johann Baptist Diller, wurde geboren am 30. Januar 1874 zu Waischenfeld, Bez.-A. Ebermannstadt, als Sohn der Lehrerseheleute Georg und Johanna Diller und bin katholischer Konfession. Nach Besuch der Volksschule trat ich im Jahre 1884 in die 1. Klasse des Kgl. alten Gymnasiums zu Bamberg ein, das ich 1893 absolvierte. Das folgende Jahr verbrachte ich am Kgl. Lyceum zu Bamberg als Studierender der Philosophie, die nächsten vier Jahre als Studierender der Mathematik und Physik an der Kgl. Technischen Hochschule in München, besuchte aber auch gleichzeitig Vorlesungen an der dortigen Kgl. Universität. Im Jahre 1896 unterzog ich mich dem ersten Prüfungsabschnitte für das Lehramt der Mathematik und Physik und 1898 dem zweiten Abschnitt dieser Prüfung. Mit 1. Dezember 1898 wurde ich zum Assistenten an der Kgl. Realschule Neustadt a. d. Haardt und ab 1. Juli 1900 zum Kgl. Reallehrer an der gleichen Anstalt ernannt. Seit 1. September 1902 bin ich als Gymnasiallehrer am Kgl. neuen Gymnasium zu Würzburg tätig. In dieser Stellung besuchte ich als Hörer wieder Vorlesungen an der hiesigen Kgl. Universität.

Meine Hochschulausbildung habe ich folgenden Herrn Professoren und Dozenten zu verdanken: Bauer †, Blinkhorn, von Braunmühl †, Burmester, Doehlemann, von Dyck, Ebert, Finsterwalder, Föppl, von Reinhardstöttner †, Rost, Sohncke †, von Weber.

Allen meinen verehrten Lehrern, insbesondere Herrn Professor Dr. Beckenkamp und ganz speziell Herrn Professor Dr. Rost, fühle ich mich zu großem Danke verpflichtet. Die mündliche Prüfung fand am 4. Dezember 1912 statt.

Inhaltsübersicht.

Seite

§ 1. Die Enneperschen Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes . 1

§ 2. Die Voßschen Flächen 11

§ 3. Darstellung der Enneperschen Flächen mit konstantem negativem Krümmungsmaß in den Parametern ihrer Haupttangentenkurven . . 16

§ 4. Übergang von den Enneperschen Flächen zu den entsprechenden Voßschen Flächen 24

§ 5. Spezielle Fälle:

I. Der Winkel, unter welchem die Ebene einer ebenen Krümmungslinie einer Enneperschen pseudosphärischen Fläche diese Fläche schneidet, soll für alle ebenen Krümmungslinien der gleiche sein; $A = 0$, $\sigma = \text{const.}$ 29

II. Die den pseudosphärischen Rotationsflächen entsprechenden Voßschen Flächen 53

§ 6. Behandlung des Falles: $A = 0$, $\sigma \neq \text{const.}$ 73